ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΣΥΓΧΡΟΝΑ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΑ ΜΑΘΗΣΗΣ ΚΑΙ ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΥ ΥΛΙΚΟΥ ΣΤΙΣ ΘΕΤΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ»

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Παραγωγή και αξιολόγηση διδακτικού υλικού για την αξιοποίηση του βιβλίου «Ο άνθρωπος που μετρούσε» στη διδασκαλία και στη μάθηση των μαθηματικών

ΗΛΙΑΣ ΚΑΛΑΜΠΟΥΚΑΣ

ΥΠΕΥΘΥΝΟΙ ΚΑΘΗΓΗΤΕΣ: Χατζηκυριάκου Κωνσταντίνος

Τριανταφυλλίδης Τριαντάφυλλος

ΒΟΛΟΣ, 2008

Φτάνοντας στο τέλος αυτού του μεγάλου και δύσκολου δρόμου θεωρώ όχι μόνο υποχρέωση, αλλά και εσωτερική ανάγκη να θυμηθώ και να ευχαριστήσω όσους συνέβαλλαν στο να γίνει αυτό το ταξίδι πιο ενδιαφέρον, πιο γόνιμο και πιο εποικοδομητικό.

Ευχαριστώ όλους τους καθηγητές και όλες τις καθηγήτριες του ΠΜΣ του Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης, οι οποίοι/ες με τις γνώσεις τους, με τις συμβουλές τους, με τα σχόλια και με τις παρατηρήσεις τους στάθηκαν αρωγοί σε αυτήν την προσπάθεια.

Ευχαριστώ τους επιβλέποντες καθηγητές της διπλωματικής μου εργασίας, οι οποίοι συνέβαλλαν ουσιαστικά στην εκπόνηση της. Η συνεργασία μαζί τους ήταν πραγματικά ενδιαφέρουσα και εποικοδομητική.

Ευχαριστώ επίσης τις φοιτήτριες οι οποίες συμμετείχαν στο ερευνητικό μέρος αυτής της εργασίας και ιδιαίτερα τη Δήμητρα, την Ελεάνα, τη Σταυρούλα, τη Σταματία και την Αναστασία, οι οποίες παρά το βαρύ πρόγραμμα τους δεν έλειψαν από καμία συνάντηση και με αυτόν τον τρόπο συνέβαλλαν ουσιαστικά στην εκπόνησή της.

Τέλος, οφείλω ένα μεγάλο ευχαριστώ στην οικογένειά μου και πιο πολύ στη σύζυγό μου, η οποία επωμίσθηκε οικογενειακές ευθύνες και καθήκοντα που μου αναλογούσαν και τα οποία λόγω των υποχρεώσεων που η συμμετοχή στο Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Σπουδών συνεπάγεται, δεν ήμουν σε θέση να αναλάβω. Αφιερώνω, λοιπόν, την εργασία μου στη Χαρά και στα δύο ‘μικρά τερατάκια’: τον Αλέξανδρο και τον Μιχάλη.

Περιεχόμενα

Β΄ ΜΕΡΟΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΕΤΑΡΤΟ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΕΜΠΤΟ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΚΤΟ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΒΔΟΜΟ

Ευρετήριο εικόνων

Η απλή συσσώρευση γεγονότων

δεν είναι επιστήμη,

όπως ένας σωρός τούβλα

δεν είναι σπίτι

Henri Poincaré

Περίληψη

Σκοπός της παρούσας έρευνας ήταν ο σχεδιασμός, η παραγωγή, η διδακτική εφαρμογή και η αξιολόγηση εκπαιδευτικού υλικού, το οποίο ενσωματώνει την ιστορία των μαθηματικών και τη λογοτεχνία στα μαθηματικά και στη μαθηματική εκπαίδευση γενικότερα, καθώς και η καταγραφή των εμπειριών και των απόψεων των φοιτητριών που συμμετείχαν στην έρευνα για τις επιπτώσεις μιας τέτοιας προσέγγισης στη διδασκαλία και στη μάθηση των μαθηματικών. Για τις ανάγκες της έρευνας επιλέχθηκε και αξιοποιήθηκε το βιβλίο «Ο άνθρωπος που μετρούσε». Στη διδακτική διαδικασία, διάρκειας έξι διδακτικών δίωρων, συμμετείχαν οκτώ φοιτήτριες του Παιδαγωγικού Τμήματος του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας. Η συλλογή των ερευνητικών δεδομένων έγινε σε τρία στάδια: με την αρχική ομαδική εστιασμένη συνέντευξη, με τη συμμετοχική παρατήρηση και τις καταγραφές των επεισοδίων αλληλεπίδρασης κατά τη διάρκεια των διδακτικών παρεμβάσεων και με το τελικό ερωτηματολόγιο. Το υλικό που προέκυψε από τη συλλογή των δεδομένων της έρευνας αναλύεται και αξιολογείται σε σχέση με το σκοπό, τους στόχους και τα ερευνητικά ερωτήματα τα οποία είχαν τεθεί. Στην εργασία παρουσιάζονται και συζητούνται τα αποτελέσματα της διδακτικής παρέμβασης που προέκυψαν από την ποιοτική ανάλυση και επεξεργασία των δεδομένων.

Εισαγωγή

Η ιστορία των μαθηματικών είναι δυνατόν να αξιοποιηθεί κατάλληλα, ώστε να διαδραματίσει ουσιαστικό ρόλο στη μαθηματική εκπαίδευση. Αν τα μαθηματικά θεωρηθούν ως ένα είδος πολιτισμικής δημιουργίας, τότε η μελέτη της ιστορίας των μαθηματικών μπορεί να γίνει ένα μέσο καλύτερης κατανόησης των σχέσεων του ανθρώπινου γένους και της μαθηματικής γνώσης, στα πλαίσια ενός γενικότερου ιστορικού γίγνεσθαι. Προς αυτή την κατεύθυνση, η συνεργασία διάφορων κλάδων διδακτικών αντικειμένων στο σχολικό περιβάλλον, μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να αναπτύξουν ερευνητικές πρωτοβουλίες, να συσχετίσουν γεγονότα, να κατανοήσουν την αλληλεξάρτηση των επιστημονικών κλάδων, και να διαπιστώσουν ότι η γνώση είναι προϊόν της ανθρώπινης δραστηριότητας στην ιστορική διαδρομή. Ακόμα, να προσεγγίσουν τα μαθηματικά ως ζωντανή διαδικασία επεξεργασιών και εξέλιξης, άμεσα συνδεδεμένης με το πολιτισμικό και κοινωνικό περιβάλλον στο οποίο αναπτύσσονται

Έτσι, συχνά ο λιτός, μονοσήμαντος, αποδεικτικός μαθηματικός λόγος αντιδιαστέλλεται προς την αμφισημία, τον υπαινιγμό, τα κρυμμένα νοήματα, τα υπονοούμενα της μυθοπλασίας. Δεν είναι αλήθεια, ωστόσο, ότι ο μαθηματικός λόγος είναι δογματικός, ότι δεν επιδέχεται πολλαπλές ερμηνείες, ότι δεν υπόκειται σε αναθεώρηση. Τα μαθηματικά δημιουργήματα, δημιουργήματα βαθιά ανθρώπινα έχουν ιστορία που συχνά συνυφαίνεται και αλληλεπιδρά με την ιστορία των δημιουργών τους.

Κανείς, μέχρι πριν από λίγα χρόνια, δε θα μπορούσε αν φανταστεί ότι θα κυκλοφορούσαν σήμερα στην Ελλάδα τέσσερα βιβλία με τη Υπόθεση Riemann και την κατανομή των πρώτων αριθμών και ότι δύο από αυτά θα ανήκαν στην κατηγορία των ευπώλητων. Η φυσική που επί χρόνια κυριαρχούσε στην επιστημονικότροπη μυθοπλασία δίνει τη θέση της στον Galois, το θεώρημα του Goedel, την εικασία του Goldbach. Δίπλα στην Επιπεδοχώρα του Edwin Abbott που από το 1884 παρέμενε απελπιστικά μόνη στα ράφια των βιβλιοπωλείων βρίσκονται πλέον ένα σωρό πλέον φίλοι και συγγενείς να τη συντροφεύουν (Μιχαηλίδης, 2007, σ.16)

Σε αυτό το πλαίσιο εντάσσεται και η παρούσα εργασία, η οποία αποτελεί την καταγραφή μιας έρευνας, η οποία διεξήχθη στο πλαίσιο εκπόνησης μεταπτυχιακής διατριβής. Στην πειραματική ομάδα συμμετείχαν οκτώ φοιτήτριες του Παιδαγωγικού

Τμήματος του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας, οι οποίες παρακολουθούσαν το μάθημα «Διασκεδαστικά Μαθηματικά». Αφορούσε την παραγωγή διδακτικού υλικού στα μαθηματικά, βασισμένου στο βιβλίο του Malba Tahan «Ο άνθρωπος που μετρούσε» (εκδ. Κάτοπτρο). Το σημαντικότερο κριτήριο επιλογής του συγκεκριμένου βιβλίου αποτέλεσε ο ιστορικός χαρακτήρας του και η ανάδυση μέσα από την αφήγηση σημαντικών μαθηματικών προσωπικοτήτων αλλά και μαθηματικών επιτευγμάτων. Έτσι δημιουργήθηκε μια διαθεματική ομπρέλα κάτω από την οποία η λογοτεχνία, διαμεσολάβησε στα μαθηματικά και την ιστορία των μαθηματικών, τα οποία αντιμετωπίστηκαν ως ενιαίο μαθησιακό πλαίσιο και όχι ως διακριτά γνωστικά αντικείμενα. Η διαθεματική προσέγγιση που επιχειρήθηκε στηρίχθηκε στο θεωρητικό πλαίσιο που υποστηρίζει την ολιστική και ολόπλευρη πραγμάτευση της γνώσης. Σκοπός της έρευνας, ήταν ο σχεδιασμός, η παραγωγή, η διδακτική εφαρμογή και η αξιολόγηση εκπαιδευτικού υλικού, το οποίο ενσωματώνει την ιστορία των μαθηματικών στη μαθηματική εκπαίδευση και η καταγραφή των εμπειριών και των απόψεων των φοιτητριών που συμμετείχαν στην έρευνα για τις επιπτώσεις μιας τέτοιας προσέγγισης.

Για το λόγο αυτό η παρούσα εργασία αποτελείται από δύο μέρη: το θεωρητικό και το εμπειρικό.

Στο πρώτο κεφάλαιο εξετάζεται η σχέση της λογοτεχνίας με τα μαθηματικά. Παρουσιάζονται επιχειρήματα για την αξιοποίηση της λογοτεχνίας στη διδασκαλία και στη μάθηση των μαθηματικών όπως επίσης και τα οφέλη που αναδεικνύονται από τη σύζευξη της λογοτεχνίας με τα μαθηματικά. Προκύπτει η ανάγκη ανάδειξης τρόπων σύζευξης τους στην εκπαιδευτική πράξη ώστε να ανταποκρίνονται στις σύγχρονες επιστημολογικές και παιδαγωγικές προσεγγίσεις.

Στο δεύτερο κεφάλαιο αναλύονται ζητήματα και προβληματισμοί σχετικά με τη θέση της ιστορίας των μαθηματικών στη μαθηματική εκπαίδευση. Αναφέρονται οι λόγοι για τους οποίους υποστηρίζεται η χρήση της ιστορίας των μαθηματικών στη μαθηματική εκπαίδευση και τα επιχειρήματα που χρησιμοποιούνται από όσους στέκονται κριτικά απέναντι σε αυτή την προσέγγιση. Παρουσιάζονται οι τρόποι με τους οποίους η ιστορία των μαθηματικών μπορεί να ενταχθεί στην εκπαιδευτική διαδικασία και παρουσιάζονται τα είδη και οι τρόποι χρήσης του διδακτικού υλικού που προέκυψαν από επισκόπηση της σχετικής βιβλιογραφίας.

Στο τρίτο κεφάλαιο αποδίδεται περιληπτικά το βιβλίο της διδακτικής παρέμβασης. Συζητείται επίσης το είδος και το ύφος του βιβλίου. Δίνονται ορισμένα βιογραφικά στοιχεία για τον συγγραφέα του, καθώς και πληροφορίες για τις εκδόσεις και τις μεταφράσεις του βιβλίου. Τέλος, αναφέρονται τα κριτήρια σύμφωνα με τα οποία επιλέχθηκε το συγκεκριμένο λογοτεχνικό βιβλίο

Στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζεται και αιτιολογείται η μεθοδολογία της έρευνας: αναφέρονται ο σκοπός, οι στόχοι και τα ερευνητικά ερωτήματα και αιτιολογείται η επιλογή των μεθόδων της διεξαγόμενης έρευνας η οποία πραγματοποιήθηκε σε τρία στάδια: του σχεδιασμού, της εφαρμογής και της αξιολόγησης. Παρουσιάζονται όλα τα στοιχεία που αφορούν τις συμμετέχουσες, τον σχεδιασμό των διδακτικών παρεμβάσεων και τα εργαλεία συλλογής δεδομένων: την αρχική συνέντευξη, τη συμμετοχική παρατήρηση και το τελικό ερωτηματολόγιο.

Στο πέμπτο κεφάλαιο συζητούνται θέματα και ζητήματα που αντιμετωπίστηκαν κατά τη φάση του σχεδιασμού της διδακτικής διαδικασίας. Υποστηρίζεται η διαθεματική οργάνωση του περιεχομένου, η οποία λήφθηκε υπόψη κατά τον σχεδιασμό των διδακτικών παρεμβάσεων. Παρουσιάζεται το χρονοδιάγραμμα της σειράς των διδακτικών παρεμβάσεων και δίνονται στοιχεία για τον σχεδιασμό και την παραγωγή των φύλλων εργασίας που αποτέλεσαν το βασικό διδακτικό υλικό που χρησιμοποιήθηκε στο στάδιο της εφαρμογής.

Στο έκτο κεφάλαιο περιγράφεται και συζητείται το στάδιο της εφαρμογής της έρευνας, το οποίο αναπτύχθηκε σε τρεις φάσεις. Αρχικά περιγράφεται η ομαδική συνέντευξη που πραγματοποιήθηκε κατά τη διάρκεια της εναρκτήριας συνάντησης. Στη συνέχεια αναλύονται και αξιολογούνται δεδομένα και αποτελέσματα που προέκυψαν κατά τη διάρκεια των διδακτικών παρεμβάσεων. Τέλος, το υλικό που προέκυψε από τη συλλογή των δεδομένων του τελικού ερωτηματολογίου αναλύεται και αξιολογείται σε σχέση με τα ερευνητικά ερωτήματα που έχουν τεθεί.

Στο έβδομο κεφάλαιο η ποιοτική ανάλυση και η επεξεργασία των ερευνητικών ευρημάτων οδηγεί στην αξιολόγηση της διδακτικής διαδικασίας και στην ερμηνεία των αποτελεσμάτων που προέκυψαν από αυτή. Το υλικό που προέκυψε από τη συλλογή των δεδομένων της έρευνας αναλύεται και αξιολογείται σε σχέση με τον σκοπό, τους στόχους και τα ερευνητικά ερωτήματα τα οποία είχαν τεθεί. Συζητούνται συμπεράσματα που προέκυψαν από τον σχεδιασμό, την εφαρμογή και την αξιολόγηση της διδακτικής διαδικασίας. Από τις προτάσεις διδακτικής αξιοποίησης, προκύπτουν νέα ερωτήματα και προβληματισμοί για τον μελλοντικό ερευνητή.

Τέλος στο Παράρτημα παραθέτονται τα φύλλα εργασίας (πολιτισμικής πλαισίωσης και μαθηματικού περιεχομένου) που αξιοποιήθηκαν στη διδακτική διαδικασία, καθώς και το τελικό ερωτηματολόγιο.

Α΄ ΜΕΡΟΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΩΤΟ

Λογοτεχνία και μαθηματικά

Στο κεφάλαιο αυτό εξετάζεται η σχέση της λογοτεχνίας με τα μαθηματικά. Παρουσιάζονται επιχειρήματα για την αξιοποίηση της λογοτεχνίας στη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών όπως επίσης και τα οφέλη που αναδεικνύονται από τη σύζευξη της λογοτεχνίας με τα μαθηματικά. Προκύπτει η ανάγκη ανάδειξης τρόπων σύζευξής τους στην εκπαιδευτική πράξη ώστε να ανταποκρίνονται στις σύγχρονες επιστημολογικές και παιδαγωγικές προσεγγίσεις.

1.1 Η διαλεκτική σχέση της λογοτεχνίας με τα μαθηματικά

Μαθηματικά και λογοτεχνία θεωρούνται σύμφωνα με μια ευρύτατα διαδεδομένη άποψη, ως εντελώς διαφορετικά μεταξύ τους πεδία της ανθρώπινης δραστηριότητας. Από την εποχή του Ρομαντισμού και μετά έχει συμβεί μία καθοριστική διχοτόμηση στον πολιτισμό μας. Οι επιστήμες και η λογοτεχνία εκλαμβάνονται ως δύο εντελώς ξεχωριστοί, ακόμα και αντικρουόμενοι, κόσμοι. Ο Snow (1995) περιγράφει αυτή τη διχοτόμηση αναφέροντας την ασυνεννοησία, την άγνοια και την έλλειψη επικοινωνίας που υπάρχει μεταξύ της επιστημονικής κοινότητας από τη μία μεριά και των ανθρώπων των τεχνών ή των γραμμάτων από την άλλη.

Έτσι, τα λογοτεχνικά κείμενα θεωρούνται περιγραφές ή αφηγήσεις εμπειριών ή γεγονότων, πραγματικών ή φανταστικών, χρονικά περιορισμένων, χωρίς καθολικότητα, κοινωνικά ή πολιτιστικά περιορισμένων τα οποία απευθύνονται κατά κύριο λόγο στις συναισθηματικές λειτουργίες του αναγνώστη.

Αντίθετα τα μαθηματικά αντιμετωπίζονται ως καταγραφές γνώσης, αντικειμενικής, καθολικής, α-χρονικής και ουδέτερης. Για πολλά χρόνια τα Μαθηματικά θεωρούνταν παγκόσμια, αντικειμενικά και ανεξάρτητα από τις κοινωνικές, πολιτισμικές και κοινωνικές συνθήκες μέσα στις οποίες αναπτύχθηκαν και ασκήθηκαν (Χασάπης, 2007, σ.iii). Η φορμαλιστική και απρόσωπη παρουσίαση των σχολικών μαθηματικών ενίσχυσε αυτή την άποψη (Σακονίδης, 2003, σ. 36) Τα τελευταία χρόνια όμως η διάσταση αυτή μεταξύ μαθηματικών και λογοτεχνίας έχει αρχίσει να αμφισβητείται.

Η αμφισβήτηση αυτή εμφανίζεται στον επιστημολογικό χώρο μόλις το 1986 με το άρθρο του εκπαιδευτικού και γνωστικού ψυχολόγου Jerome Bruner 'Two modes of thought'. Αν και από παλαιότερα ήταν προφανές ότι υπήρχαν ειδικές περιπτώσεις αφήγησης με σκοπιμότητα μη-καλλιτεχνική[1], ο Bruner (1986, pp.12-43) είναι ο πρώτος που έθεσε το θέμα στη γενικότητά του, τονίζοντας ότι ο ανθρώπινος νους έχει δύο εντελώς διαφορετικούς τρόπους να γνωρίζει την πραγματικότητα: αυτόν που αποκαλεί *παραδειγματικό* (*paradigmatic*) δηλαδή τον ταξινομικό, 'επαγωγικό' (inductive) ή 'παραγωγικό' (deductive) της επιστήμης, και δεύτερο τον *αφηγηματικό* (*narrative*), που είναι διάφορος του πρώτου σε μορφή, πρόθεση και λειτουργία. Και οι δυο τρόποι, ενώ μπορούν να συνεργαστούν, δεν μπορούν να υποκαταστήσουν ο ένας τον άλλον.

Έτσι η αφήγηση, εκτός από μηχανισμός παραγωγής συναισθηματικών αντιδράσεων, είναι και μορφή γνώσης. Ονομάζοντας και ορίζοντας τη γνωστική (σε αντίθεση με την απλά αισθητική ή/και συναισθηματική) λειτουργία του αφηγηματικού τρόπου στη γενικότητά του, ο Bruner νομιμοποίησε αλλά και υποκίνησε ουσιαστικά τη μελέτη της αφήγησης και υπό αυτό το πρίσμα.(Δοξιάδης, 2007).

Μπορούμε να διακρίνουμε τέσσερις μορφές σύνδεσης μαθηματικών και λογοτεχνίας (Κολέζα, 2007), που επιτυγχάνεται όταν:

- ένα λογοτεχνικό κείμενο επικαλείται τα μαθηματικά για να στηρίξει μία θεωρία[2],
- ένα λογοτεχνικό κείμενο δημιουργείται με πηγή έμπνευσης τα μαθηματικά,
- λογοτεχνικά βιβλία γράφονται με θέμα τα μαθηματικά ή με σημαντικό μαθηματικό περιεχόμενο και
- τα μαθηματικά αποτελούν το θέμα ενός λογοτεχνικού βιβλίου για καθαρά εκπαιδευτικούς στόχους.

---

[1] Τα αφηγήματα του Ηρόδοτου, του Θουκυδίδη ή του Ξενοφώντα μπορούν να ενταχθούν σε αυτήν την κατηγορία

[2] Στην περίπτωση αυτή υιοθετείται έμμεσα η αντίληψη ότι τα μαθηματικά ως μία άρτια συγκροτημένη επιστήμη μπορούν να εξηγήσουν τα πάντα και επομένως μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την υποστήριξη ή απόρριψη μίας θεωρίας. Για παράδειγμα στο έργο «Αδερφοί Καραμαζώφ» ο Ντοστογιέφσκι χρησιμοποιεί τη μη-Ευκλείδεια γεωμετρία για να υποστηρίξει το μεταφυσικό του δίλημμα ότι ενώ πιστεύει στο Θεό δεν μπορεί να πιστέψει ότι ο Θεός έφτιαξε τον κόσμο.

Μέσα από αυτή την προβληματική αναδείχθηκε και γνωρίζει μεγάλη άνθηση τα τελευταία χρόνια μια νέα κατηγορία λογοτεχνίας: η μαθηματική λογοτεχνία. Με τον όρο αυτό εννοούμε κείμενα που αναφέρονται στα μαθηματικά και τον κόσμο τους και δεν έχουν συγγραφεί ως μαθηματικές μονογραφίες ή μαθηματικά εγχειρίδια. Τα κείμενα αυτά μπορεί να είναι βιογραφίες ή αυτοβιογραφίες μαθηματικών, μυθιστορήματα ή διηγήματα με ήρωες μαθηματικούς ή μαθηματικά αντικείμενα, αφηγήματα με αναφορές σε μαθηματικές έννοιες, ανθολογίες με σπαζοκεφαλιές και ψυχαγωγικά μαθηματικά προβλήματα, αλλά και κάποια κείμενα μαθηματικής εκλαΐκευσης (Χατζηκυριάκου, 2007, σσ. 277-278). Μπορεί επίσης κάποιο διάσημο ή λιγότερο γνωστό μαθηματικό πρόβλημα να χρησιμοποιηθεί ως πρόσχημα για τις ανάγκες εξέλιξης της πλοκής του κειμένου. Στην κατηγορία αυτή εντάσσεται και «ο άνθρωπος που μετρούσε», το βιβλίο, το οποίο αξιοποιήθηκε στην παρούσα έρευνα και το οποίο περιγράφεται αναλυτικότερα στο τέταρτο κεφάλαιο του πρώτου μέρους.

1.2 Επιχειρήματα για την αξιοποίηση της λογοτεχνίας στη μαθηματική εκπαίδευση

Στηριζόμενοι στη διάκριση των τρόπων σκέψης από τον Bruner, μπορούμε να υποστηρίξουμε ότι μαθηματικά και λογοτεχνία δε δρουν ανταγωνιστικά μεταξύ τους. Αντίθετα, αποτελούν δύο συμπληρωματικούς τρόπους στην αναζήτηση και κατανόηση των δεδομένων ενός προβλήματος. Οι μαθηματικές έννοιες γίνονται πιο κατανοητές για τους μαθητές και τις μαθήτριες μέσα από τον κατάλληλο χειρισμό της γλώσσας, δυνατότητα που προσφέρει η λογοτεχνία, ενώ ταυτόχρονα η λογοτεχνία δανείζεται χαρακτηριστικά της γλώσσας των μαθηματικών.

Η λογοτεχνία δημιουργεί ευκαιρίες για την προσέγγιση, ενσωμάτωση και εξέταση των μαθηματικών σε ενδιαφέροντα συμφραζόμενα. Με όχημα τη λογοτεχνική ιστορία και διάφορες παιγνιώδεις δραστηριότητες που προκύπτουν από αυτή, τα παιδιά έχουν την ευκαιρία να μάθουν τη μαθηματική γλώσσα, τις έννοιες των μαθηματικών και να λύσουν προβλήματα. Το κείμενο του λογοτεχνήματος δημιουργεί ένα οικείο πλαίσιο (δομημένοι διάλογοι, χωροχρόνος, μυθιστορηματικά πρόσωπα, εικόνες) που τα παιδιά μπορούν να χειριστούν (Λαλαγιάννη, 2005). Από την εξοικείωση του μαθητή και της μαθήτριας με το κείμενο και από την ταύτιση με πρόσωπα της ιστορίας, οι μαθηματικές έννοιες δε διδάσκονται στο πλαίσιο ενός αυστηρά δομημένου μαθήματος αλλά μέσα σε ενδιαφέροντα συμφραζόμενα και σε δραστηριότητες που ευνοούν τον διάλογο και τη συμμετοχή όλων των παιδιών. Η λογοτεχνία δίνει την ευκαιρία στους μαθητές να ακούν, να διαβάζουν και να καταλαβαίνουν κείμενα που περιέχουν ποσοτικές πληροφορίες, να αναπτύσσουν ικανότητες εντοπισμού πληροφοριών που μεταφέρει το κείμενο και να χρησιμοποιούν αυτές τις πληροφορίες στη λύση προβλημάτων που απαιτούν υπολογισμούς, χρήσης αναπαραστάσεων, μαθηματική σκέψη και επιχειρηματολογία Άλλωστε, λόγω της διαφορετικής και πιο οικείας δομής της αφήγησης, όπως επίσης και του ιδιαίτερου χαρακτήρα της, προσφέρεται η δυνατότητα ευκολότερης και καλύτερης κατανόησης των μαθηματικών δεδομένων σε σύγκριση με την ψυχρή και αποπλαισιωμένη διατύπωση ενός προβλήματος. Βέβαια η λογοτεχνία, όπως και τα μαθηματικά, δεν μπορεί να είναι ποτέ απόλυτα τυποποιημένη.

Σύμφωνα με τη Γιαννικοπούλου (2002, σ. 79), η προσφορά της λογοτεχνίας στο μάθημα των μαθηματικών είναι η χαμένη συναισθηματική παράμετρος από τους περίπλοκους υπολογισμούς και τα σύμβολα. Οι μαθητές αντιλαμβάνονται καλύτερα τους μαθηματικούς όρους και τις μαθηματικές πράξεις όταν χρησιμοποιούν τη γλώσσα των μαθηματικών σε καταστάσεις που έχουν νόημα για αυτούς. Η κατανόηση της σχέσης των μαθηματικών του σχολείου με τις εξωσχολικές εμπειρίες καθιστά τους μαθητές ικανούς στην πρακτική εφαρμογή και αξιοποίηση της γνώσης. Όπως χαρακτηριστικά αναφέρεται «*όταν οι μαθητές κατορθώνουν να «διαβάζουν» τον κόσμο τις φορές που αυτός εκφράζεται με όρους μαθηματικούς, τότε κατακτούν τον μαθηματικό αλφαβητισμό*» (Γιαννικοπούλου, 2002, σ. 80).

Συνεπώς τα οφέλη που προκύπτουν από τη χρήση της λογοτεχνίας στη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών είναι ποικίλα. Σύμφωνα με την Κολέζα (2007, σ. 44) οφέλη προκύπτουν διότι:

- η προσπάθεια και η ανάγκη κατανόησης της ιστορίας οδηγεί τους μαθητές στην επέκταση της γνώσης και της προσωπικής εμπειρίας,
- οι ιστορίες απαιτούν από τους μαθητές να περάσουν από μια σειρά κύκλων έκφρασης, επανεξέτασης και αναθεώρησης ή απόρριψης του τρόπου σκέψης τους
- οι ιστορίες απαιτούν γνώση, η οποία δεν ανάγεται σε απλές δηλώσεις ή κανόνες. Με άλλα λόγια η ανάγκη κατανόησης της ιστορίας μπορεί να οδηγήσει τον μαθητή στην απόκτηση «ειδικών» γνώσεων.

Επίσης δραστηριότητες που βασίζονται σε λογοτεχνικά κείμενα μπορούν να αξιοποιηθούν με τέτοιο τρόπο ώστε:

- να επεκτείνουν τη φυσική περιέργεια των παιδιών,
- να ενθαρρύνουν τους μαθητές στην αναζήτηση νοήματος,
- να συνεισφέρουν στον εμπλουτισμό του λεξιλογίου τους,
- να ενθαρρύνουν την αισθητική εκτίμηση των μαθηματικών και
- να βοηθούν στην ανάπτυξη νέων τρόπων σκέψης για τον κόσμο τους.

Είναι φανερό, ότι όλα τα λογοτεχνικά κείμενα δεν είναι κατάλληλα για διδακτική αξιοποίηση. Η επιλογή λογοτεχνικών κειμένων και ιστοριών θα πρέπει να γίνεται με κριτήριο το κατά πόσο μπορούν να συνεισφέρουν και να χρησιμεύσουν στη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών ώστε να προκύπτουν οφέλη από τη χρήση τους. Κάποιες φορές, η χρησιμοποίηση από τους συγγραφείς ολοένα και περισσότερων μαθηματικών στην πλοκή της ιστορίας μπορεί να οδηγήσει σε αποτελέσματα διαφορετικά από τα επιδιωκόμενα. Σε παρόμοιο συμπέρασμα καταλήγει και ο Χατζηκυριάκου (2007, σ.283) όταν αναφέρει ότι «... *η δημιουργική μονομανία και η στερεοτυπική αλαζονεία των μαθηματικών της μυθοπλασίας, την οποία ενίοτε οι συγγραφείς των βιβλίων εκμεταλλεύονται στην πλοκή τους, δεν συνέβαλλε στην αλλαγή της όχι ιδιαίτερα θετικής εικόνας που είχαν* (φοιτητές και φοιτήτριες) *για τους μαθηματικούς...»*

1.3 Λογοτεχνία και μαθηματικά στην εκπαιδευτική πράξη

Από τη σκοπιά της διδακτικής των Μαθηματικών, οι αμφίδρομες σχέσεις μαθηματικών και λογοτεχνίας αποτελούν πλέον αντικείμενο προβληματισμού και ερευνών, οι οποίες ξεκινώντας από διαπιστώσεις για την αναποτελεσματικότητα των παραδοσιακών προσεγγίσεων στον χώρο της διδακτικής των μαθηματικών επιδιώκουν την ανάπτυξη εναλλακτικών διδακτικών προσεγγίσεων και αξιοποιούν όλες τις δυνατότητες του ανθρώπινου νου. Ένας βασικός λόγος που ένας μεγάλος αριθμός μαθητών έχει αρνητικά συναισθήματα απέναντι στα μαθηματικά είναι ότι δεν τα καταλαβαίνουν. Ο τρόπος που διδάσκονται τα μαθηματικά δε συνεισφέρει ούτε στην εκτίμηση της αξίας τους από τους μαθητές, ούτε στην κατανόησή τους (Κολέζα, 2007, σ.45).

Το έργο του Gardner (1993) για τους πολλαπλούς τύπους νοημοσύνης έστρεψε την προσοχή στον σχεδιασμό προσεγγίσεων, οι οποίες ξεφεύγοντας από τη μονοδιάστατη θεώρηση της γνώσης, δημιουργούν συνθήκες ολόπλευρης ανάπτυξης του ατόμου. Τίθεται επομένως το ερώτημα, εάν είναι δυνατή η σύζευξη μαθηματικών και λογοτεχνίας, καθώς και το πόσο εύκολη είναι μια τέτοια προσπάθεια. Ο Χασάπης (2007, σ. 5) θέτει απαντώντας στο ερώτημα αυτό τρεις προϋποθέσεις:

- Μια διαφορετική από την κυρίαρχη σήμερα θεώρηση της μάθησης, στην οποία οι συναισθηματικές λειτουργίες θα αντιμετωπίζονται όχι μόνο ως ισότιμες, αλλά ως προϋπόθεση της ανάπτυξης των γνωστικών λειτουργιών

- Μια διαφορετική από την επικρατούσα προσέγγιση των μαθηματικών ως επιστημονικής πρακτικής και σχολικής γνώσης και

- Μια διαφορετική από την εδραιωμένη στη διδασκαλία των μαθηματικών αντιμετώπιση της ανάγνωσης κειμένων και κατά συνέπεια του ρόλου της στη μάθηση των μαθηματικών.

Η χρήση λογοτεχνικών κειμένων δεν αντικαθιστά την αναλυτική σκέψη. Τη συμπληρώνει με το να αναπτύσσει τη φαντασία, με το να προκαλεί για εναλλακτικές ερμηνείες, με το να δημιουργεί ένα περιβάλλον όπου ο μαθητής εμπλέκεται ηθελημένα και συμμετέχει μέσα από τις προσωπικές του ερμηνείες.

Σε διεπιστημονικές ή διαθεματικές προσεγγίσεις μπορεί να χρησιμοποιηθούν ιστορίες με προβλέψιμη δομή, κείμενα με εικόνες που εμπλουτίζουν το κείμενο και ενισχύουν την κατανόηση, βιβλία που τα παιδιά παρακολουθούν εύκολα και με ενδιαφέρον. Τα μαθηματικά σε αυτήν την περίπτωση αποτελούν αναπόσπαστο μέρος της ιστορίας με τις μαθηματικές έννοιες να αποτελούν τμήμα του λεξιλογίου του κειμένου ή να υπολανθάνουν μέσα στο κείμενο. Η μαθηματική γλώσσα είναι απαραίτητη για να περιγραφούν γεγονότα και φαινόμενα της ιστορίας. Κατά τη διάρκεια της ανάγνωσης της ιστορίας και των ποικίλων δραστηριοτήτων που την ακολουθούν, καλλιεργείται η κατανόηση της ειδικής γλώσσας στη γραπτή και προφορική της μορφή καθώς και η χρήση της στην απλοποίηση σύνθετων καταστάσεων, στην οργάνωση των διαθέσιμων στοιχείων και στην ερμηνεία των αποτελεσμάτων (Τριανταφυλλίδης, 2002).

Η Κολέζα (2007, σ. 44-45) αναφέρει τέσσερις τρόπους χρήσης λογοτεχνικών κειμένων στη διδασκαλία των μαθηματικών. Συγκεκριμένα προτείνεται:

- η αξιοποίηση του λογοτεχνικού κειμένου πριν τη διδασκαλία των μαθηματικών που αναφέρονται στο κείμενο. Στη συνέχεια με αναφορές στο κείμενο, οι μαθητές απαντούν σε ερωτήσεις σχετικές με το μαθηματικό περιεχόμενο του κειμένου,
- η χρησιμοποίηση του κειμένου στο τέλος μιας μαθηματικής ενότητας. Στόχος αυτής της προσέγγισης είναι ο αναστοχασμός σε μαθηματικές έννοιες που έχουν διδαχθεί στη συγκεκριμένη ενότητα,
- η διερεύνηση από τους μαθητές των ερωτημάτων που προκύπτουν από τη μελέτη του κειμένου και
- η συγγραφή από τους μαθητές μίας ιστορίας που να περιλαμβάνει μαθηματικές έννοιες που έχουν διδαχθεί.

Ο Triandafillidis (2006) προτείνει την παρουσίαση μαθηματικών εννοιών, οι οποίες προκύπτουν από τη δημιουργία ποιημάτων που γράφουν οι ίδιοι οι μαθητές. Εκτός από τις επιπτώσεις στον γνωστικό τομέα αναδεικνύονται οι συναισθηματικοί και ψυχοκινητικοί παράμετροι της μαθησιακής διαδικασίας. Επιπλέον τα ποιήματα μπορούν να φανερώσουν τις ιδέες των παιδιών για τις μαθηματικές έννοιες, οι οποίες αποτελούν αντικείμενο διαπραγμάτευσης των ποιημάτων, για τις προσδοκίες, για τα συναισθήματα και για τις πρακτικές που συνδέονται με τη διδασκαλία των μαθηματικών στην τάξη.

Η ενιαιοποίηση της σχολικής γνώσης εξασφαλίζει την πολύπλευρη και πολυδιάστατη προσέγγιση ποικίλων θεμάτων. Μπορεί να παίξει καθοριστικό ρόλο στη διαμόρφωση μαθητών και μαθητριών που να διαθέτουν γνωστικές και κριτικές δεξιότητες, τέτοιες που να τους βοηθούν να ανταποκριθούν στις απαιτήσεις ενός σύγχρονου εκπαιδευτικού συστήματος, καθώς και στο να καταστούν υπεύθυνοι και ενεργοί πολίτες, ευαισθητοποιημένοι στα προβλήματα της σύγχρονης πραγματικότητας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ

Ιστορία των μαθηματικών και μαθηματική εκπαίδευση

Στο κεφάλαιο αυτό αναλύονται ζητήματα και προβληματισμοί σχετικά με τη θέση της ιστορίας των μαθηματικών στη μαθηματική εκπαίδευση. Αναφέρονται οι λόγοι για τους οποίους υποστηρίζεται η χρήση της ιστορίας των μαθηματικών στη μαθηματική εκπαίδευση και τα επιχειρήματα που χρησιμοποιούνται από όσους στέκονται κριτικά απέναντι σε αυτή την προσέγγιση. Παρουσιάζονται οι τρόποι με τους οποίους η ιστορία των μαθηματικών μπορεί να ενταχθεί στην εκπαιδευτική διαδικασία και παρουσιάζονται τα είδη και οι τρόποι χρήσης του διδακτικού υλικού που προέκυψαν από επισκόπηση της σχετική βιβλιογραφίας.

2.1 Η ιστορία των μαθηματικών στην μαθηματική εκπαίδευση

Με τον όρο «μαθηματική εκπαίδευση» εννοείται, πολύ γενικά, ένα σύνολο κοινωνικών πρακτικών, οι οποίες αναπτύσσονται σε τυπικά θεσμοθετημένα και άτυπα καθιερωμένα πλαίσια με στόχο τη μάθηση κάθε είδους μαθηματικών γνώσεων και τεχνικών και παράλληλα ένα πεδίο επιστημονικής πρακτικής, το οποίο μελετάει και με τα αποτελέσματα του προσανατολίζει τις πρακτικές αυτές. Ο ορισμός αυτός δεν υπονοεί σε καμία περίπτωση ότι η μαθηματική γνώση υπάρχει ανεξάρτητα από τον άνθρωπο και τις δραστηριότητες του. Μ' αυτή την ευρεία έννοια ως μαθηματική εκπαίδευση μπορεί να νοηθεί, η ανάπτυξη κάθε είδους σχέσης των ανθρώπων με τη μαθηματική δραστηριότητα και τα αποτελέσματα της. Τα μαθηματικά, ως γνώση και δραστηριότητα, και η διδακτική σχέση διδασκομένων και διδασκόντων αποτελούν, επομένως, συστατικά στοιχεία της μαθηματικής εκπαίδευσης. (Χασάπης, 2005, σ. 1)

Ο έντονος διάλογος για τον ρόλο που μπορεί να διαδραματίσει η ιστορία των μαθηματικών στη μαθηματική εκπαίδευση εξηγείται από την ολοένα αυξανόμενη έμφαση που δίνεται στη διαθεματικότητα και στην ένταξη της στα Προγράμματα Σπουδών. Τη δεκαετία του ΄70 ο Freudenthal έδινε έμφαση στην αξιοποίηση «*της* *ιστορίας των (διαφόρων) επιστημών ως ενιαία γνώση και όχι σαν αντικείμενα τακτοποιημένα σε ένα συρτάρι, τα οποία έχουν την ταμπέλα τους και ανοίγονται όταν ανακοινώνονται από το ωρολόγιο πρόγραμμα»* (1981, p. 33). Ωστόσο η συζήτηση για τη θέση της ιστορίας των μαθηματικών στη μαθηματική εκπαίδευση και για τη διδακτική της αξιοποίηση δεν είναι νέα. Σύμφωνα με τον Χατζηκυριάκου[3], η πρόταση για τη διδακτική αξιοποίηση της ιστορίας των μαθηματικών «*όχι μόνον επανέρχεται από τότε που η μαθηματική πρακτική αποκτά λίγο ως πολύ καταγραμμένο και μελετημένο παρελθόν, δηλαδή ιστορία, αλλά και συντελεί στη διαμόρφωση του γνωστικού πεδίου της ιστορίας των μαθηματικών*» (2006, σ. 47). Όπως επίσης αναφέρει ο Fauvel, (1991, p.3). «*για δεκαετίες, αν όχι αιώνες, αρκετές φωνές σε κάθε γενιά συμβούλευαν για την αξία και την αναγκαιότητα της χρησιμοποίησης της ιστορίας των μαθηματικών στη διδασκαλία των μαθηματικών*».

Σύμφωνα με τον Fauvel (1991, p. 4) η συζήτηση για τη χρήση της ιστορίας των μαθηματικών πρέπει να επικεντρωθεί στο α) *πώς* αυτή μπορεί να ενσωματωθεί στις δραστηριότητες της τάξης, β) *πώς* μπορεί να κάνει τη διδασκαλία διάφορων ειδικών θεμάτων ευκολότερη και γ) *πώς* η επιπλέον δουλειά η οποία μπορεί να χρειάζεται στην αρχή, αποζημιώνει μακροπρόθεσμα με την βελτίωση της επίτευξης των στόχων της μαθηματικής εκπαίδευσης.

Ο Tymoczko θεωρεί τα μαθηματικά όχι μόνο ως το αποτέλεσμα των ειδικών μαθηματικών, αλλά και ως τη δραστηριότητα μέσω της οποίας παράγεται αυτό το αποτέλεσμα. Με αυτή την έννοια τα μαθηματικά δεν αποτελούν μόνο ένα σύστημα γνώσεων αλλά και μία διαδικασία (αναφορά στο Σκούρας, 2002, σ.102).

Δεχόμενοι, λοιπόν, τα μαθηματικά όχι μόνο ως πληροφοριακό περιεχόμενο, αλλά και ως διαδικασία σύλληψης, τεκμηρίωσης και οργάνωσης του περιεχομένου αυτού, σε κάθε προσπάθεια παρουσίασης ή διδασκαλίας τους, τόσο η επιλογή περιεχομένων όσο και μεθόδου, είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με την κατανόηση αυτών των διαδικασιών σύλληψης, τεκμηρίωσης και οργάνωσης των επιμέρους μαθηματικών γνώσεων (Τζανάκης & Κούρκουλος, 2000, σ. 72).

[3] Περισσότερα για την ιστορική εξέλιξη του διαλόγου για τη θέση της ιστορίας των μαθηματικών στην μαθηματική εκπαίδευση στο Χατζηκυριάκου, Κ. (2006). Η ιστορία της ιστορίας των μαθηματικών: Δυο-τρία πράγματα που ξέρω γι' αυτήν. Στο Δ. Χασάπης (επιμ) *Μαθηματικά και Λογοτεχνία*. Πρακτικά 5ου Διήμερου Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών. Θεσσαλονίκη. 47-62

Οι πρακτικές διδασκαλίας αντικατοπτρίζουν σε μεγάλο βαθμό τις απόψεις των δασκάλων των μαθηματικών για το τι είναι τα μαθηματικά. Η συνήθης άποψη για τα μαθηματικά δίνει έμφαση στο τελικό «προϊόν» της μαθηματικής δημιουργίας με συνέπεια να συντηρούνται και αντίστοιχες πρακτικές στην καθημερινή διδακτική πράξη. Ασφαλώς και αποτελεί σημαντικό τμήμα των μαθηματικών το τελικό «προϊόν» της μαθηματικής δημιουργίας, αφού αυτό το «προϊόν» μπορεί να διατυπώνεται κατά τρόπο σαφή και κατηγορηματικό. Όμως, η έμφαση στα αποτελέσματα και (αναπόφευκτα;) ο τρόπος παρουσίασής τους -τυπική και απαγωγικά δομημένη μορφή- υποβαθμίζει τη διαδικασία μέσω της οποίας φθάνουμε σε αυτά.

Έρευνα (Τζεκάκη, 2000) που αφορά στις επιδόσεις και στις δυσκολίες μαθητών ελληνικών σχολείων ηλικίας 11-16 ετών σε βασικούς τομείς του Προγράμματος Σπουδών των Μαθηματικών, έδειξε ότι, στο τέλος της υποχρεωτικής εκπαίδευσης, πολλοί μαθητές δεν έχουν κατορθώσει να αποκτήσουν βασικές μαθηματικές γνώσεις. Συνολικά μπορεί να αναφερθεί ότι το επίπεδο των μαθηματικών γνώσεων των μαθητών, τόσο στο τέλος του Δημοτικού όσο και στο τέλος του Γυμνασίου είναι αρκετά χαμηλό. Η διαπίστωση αυτή δίνει μια μάλλον κακή εικόνα για τη μαθηματική εκπαίδευση στα ελληνικά σχολεία Αυτό που έχει όμως σημασία είναι ότι μεγάλος αριθμός δυσκολιών που συναντούν οι μαθητές στα Μαθηματικά, οφείλεται περισσότερο στις πρακτικές διδασκαλίας και λιγότερο στη φύση του αντικειμένου ή στις γνωστικές ικανότητες των μαθητών (Τζεκάκη, 2000). Ως εκ τούτου, οι στόχοι της μαθηματικής εκπαίδευσης για τους περισσότερους μαθητές είναι αδύνατον να προσεγγισθούν. Μόνο για τους λίγους η μαθηματική εκπαίδευση απελευθερώνει και φωτίζει το κρυμμένο δυναμικό των Μαθηματικών.

Η Confrey (1990) μελετώντας τις επιπτώσεις του εποικοδομητισμού στη διδασκαλία υποστηρίζει ότι τα μαθηματικά προέρχονται από την ανθρώπινη δραστηριότητα και απαιτείται η αναστοχαστική διαδικασία πάνω στο αντικείμενο που είναι το ίδιο το «προϊόν» (p.109). Σε ένα τέτοιο μαθησιακό περιβάλλον όπου θα αναδεικνύονται οι «σχέσεις μαθηματικών και πραγματικού κόσμου» και το πλαίσιο ως τρόπος ενεργοποίησης των μαθητών απέναντι σε προβλήματα (Herrera & Owens, 2001, p.89) η ιστορία των μαθηματικών είναι δυνατόν να αξιοποιηθεί κατάλληλα, ώστε να διαδραματίσει ουσιαστικό ρόλο στη μαθηματική εκπαίδευση.

Την ανάγκη μελέτης του ρόλου της ιστορίας στη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών επισημαίνει ο Bagni, ο οποίος συμπεραίνει ότι η μαθηματική γνώση, η διδακτική επάρκεια και η ιστορική γνώση δεν υπάρχουν απομονωμένες και οι μεταξύ τους σχέσεις αντανακλούν σημαντικές επιστημολογικές παραδοχές (2004, p.8.)

Αν τα μαθηματικά θεωρηθούν ως ένα είδος πολιτισμικής δημιουργίας, τότε η μελέτη της ιστορίας των μαθηματικών μπορεί να γίνει ένα μέσο καλύτερης κατανόησης των σχέσεων του ανθρώπινου γένους και της μαθηματικής γνώσης, στο πλαίσιο ενός γενικότερου ιστορικού γίγνεσθαι Προς αυτή την κατεύθυνση, η συνεργασία διάφορων κλάδων διδακτικών αντικειμένων στο σχολικό περιβάλλον, μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να προσεγγίσουν τα μαθηματικά ως ζωντανή διαδικασία επεξεργασιών και εξέλιξης, άμεσα συνδεδεμένης με το πολιτισμικό περιβάλλον στο οποίο αναπτύσσονται, να αναπτύξουν ερευνητικές πρωτοβουλίες, να συσχετίσουν γεγονότα, να κατανοήσουν την αλληλεξάρτηση των επιστημονικών κλάδων, και να διαπιστώσουν ότι η γνώση είναι προϊόν της ανθρώπινης δραστηριότητας στην ιστορική διαδρομή.

Παραμένει, επομένως, επίκαιρη η πρόταση που κατέθεσαν πολλοί ερευνητές και καταγράφεται στην διεθνή βιβλιογραφία (Fauvel & van Maanen, 1997), για τη συγκρότηση μιας ομάδας εργασίας αποτελούμενη από ιστορικούς των μαθηματικών, σχεδιαστές αναλυτικών προγραμμάτων και μαχόμενους εκπαιδευτικούς όλων των βαθμίδων, με στόχο την επεξεργασία ενός πλαισίου για την ενσωμάτωση της ιστορίας των μαθηματικών στη μαθηματική εκπαίδευση. Ενός πλαισίου, το οποίο εκτός από τη φιλοσοφία ενός τέτοιου προσανατολισμού, θα καταγράφει, θα συνδέει και θα συγκεκριμενοποιεί «στιγμές» της ιστορίας με τα τρέχοντα αναλυτικά προγράμματα. Σύμφωνα με τη Furinghetti (1997, p. 55), η χρήση της ιστορίας των μαθηματικών και η μελέτη της αποτελεσματικότητάς της στη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών απαιτεί συστηματική προσέγγιση, η οποία θα βασίζεται στη μεθοδική συνεργασία μεταξύ εκπαιδευτικών και ιστορικών.

2.2 Επιχειρήματα για την αξιοποίηση της ιστορίας των μαθηματικών στη μαθηματική εκπαίδευση

Η μάθηση είναι μια δραστηριότητα που διαμορφώνεται και αναπτύσσεται μέσα σε πλαίσια ιστορικά και κοινωνικά καθορισμένα, που ως πολιτιστικές παραδόσεις διαθέτουν και αναπτύσσουν ποικίλα νοητικά εργαλεία και τρόπους σκέψης. (Χασάπης, 1996, σ. 83). Προκύπτει έτσι η ανάγκη αξιοποίησης της ιστορίας των μαθηματικών, η οποία μελετά τα μαθηματικά ως ένα κοινωνικό και πολιτισμικό φαινόμενο, επικεντρώνοντας το ενδιαφέρον της σε διάφορες χωρικές, χρονικές και πολιτισμικές ιδιαιτερότητες, συνεισφέροντας με αυτό τον τρόπο στην ουμανιστική αντιμετώπιση της ανθρώπινης πραγματικότητας. (Τοκμακίδης, 2005)

Η ερώτηση που καλούνται να απαντήσουν όσοι επιχειρηματολογούν υπέρ της αξιοποίησης της ιστορίας των μαθηματικών στη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών είναι: ποια εκπαιδευτικά οφέλη επιτυγχάνονται μέσω της χρήσης της ιστορίας των μαθηματικών;

Οι Tzanakis & Arcavi (2000, p.203) αναφέρουν πέντε βασικές περιοχές, οι οποίες μπορούν να υποστηριχθούν, να εμπλουτιστούν και να βελτιωθούν με την ενσωμάτωση της ιστορίας των μαθηματικών στην εκπαιδευτική διαδικασία. Αναλυτικά οι περιοχές που αναφέρονται είναι:

Α) *η μάθηση των Μαθηματικών*

Σε αντίθεση με την αξιωματική, παραγωγική οργάνωση της μαθηματικής επιστήμης, έννοιες, δομές ή ιδέες συνδέονται με τους λόγους, τα αίτια και τα φαινόμενα που τις δημιούργησαν, προτείνοντας έτσι άλλους πιθανούς τρόπους παρουσίασης του θέματος. Η χρήση της ιστορίας των μαθηματικών ως πηγής μπορεί να ενεργοποιήσει το ενδιαφέρον του μαθητή και να λειτουργήσει ως γέφυρα με άλλα γνωστικά αντικείμενα, δημιουργώντας ένα πεδίο, όπου οι μαθητές μπορούν να αναπτύξουν άλλες δεξιότητες και ικανότητες.

Β) *η φύση των μαθηματικών και της μαθηματικής δραστηριότητας.*

Σε επίπεδο περιεχομένου αναδεικνύεται η εξελικτική φύση των μαθηματικών. Έτσι η μαθηματική γνώση δεν προκύπτει ξαφνικά εφόσον η ιστορία είναι μέρος της. Η σύγκριση της εκάστοτε μαθηματικής γλώσσας με τη σημερινή, δίνει τη δυνατότητα επανεξέτασης και αξιολόγησης των διαφόρων αυτών μορφών αναπτύσσοντας έτσι την κριτική διάσταση της σκέψης.

Γ) *το διδακτικό υπόβαθρο του δασκάλου*

Από τη μελέτη της ιστορίας ο δάσκαλος μπορεί να αναπτύξει ικανότητες να εντοπίζει κίνητρα, να αναγνωρίζει δυσκολίες ή λάθη και τον βαθμό δυσκολίας κάθε θέματος, να εμπλουτίζει το διδακτικό του ρεπερτόριο και να εκτιμά τη φύση της μαθηματικής δραστηριότητας. Η γνώση της ιστορίας των μαθηματικών από τους μαχόμενους εκπαιδευτικούς είναι μια δουλειά δύσκολη και απαιτητική, η οποία ωστόσο μπορεί να βοηθήσει στην αλλαγή του τρόπου με τον οποίο σκέφτονται για τους μαθητές τους (Barbin, 2000, p. 64). Επιπλέον τα ιστορικά λάθη κατά την εξέλιξη και ανάπτυξη των μαθηματικών μπορούν να βοηθήσουν τους εκπαιδευτικούς στην εξήγηση των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν οι σημερινοί μαθητές.(Liu, 2003, p.416)

Δ) η *συναισθηματική προδιάθεση απέναντι στα μαθηματικά*

Τα μαθηματικά αντιμετωπίζονται ως αποτέλεσμα επίπονης, μακροχρόνιας προσπάθειας, ως ανθρώπινο και όχι ως θεόσταλτο προϊόν. Έτσι η ιστορία των μαθηματικών μπορεί να βοηθήσει στην ανάπτυξη θετικής στάσης απέναντι στα μαθηματικά (Liu, 2003). Σημαντική επίσης είναι η ανάδειξη της σημασίας του λάθους, το οποίο αντιμετωπίζεται ως φυσιολογική εξέλιξη και όχι ως αποθαρρυντικός παράγοντας μέσα από παραδείγματα μεγάλων μαθηματικών. Η εξέταση των λαθών μέσα στην ιστορική τους προοπτική δε θα μπορούσε να γίνει χωρίς να ληφθούν υπόψη τα προβλήματα που βρίσκονται πίσω από αυτά. Τα ιστορικά προβλήματα μπορούν να βοηθήσουν στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης (Liu, 2003) και μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την ενεργοποίηση, διευκρίνιση ή διαφώτιση των θεμάτων της τάξης (Fried, 2001, p.393), ακόμη κι αν το ΑΠΣ των μαθηματικών δεν είναι δομημένο σύμφωνα με την ιστορική εξέλιξη. Η Furinghetti (2000, p.51) υποστηρίζει ότι «η αίσθηση του τι σημαίνει λύνω ένα πρόβλημα» αποτελεί ένα πολύ σημαντικό στοιχείο της μάθησης των μαθηματικών.

Ε) τα μαθηματικά ως πολιτισμικός «μόχθος»

Η χρήση ιστορικών παραδειγμάτων προσφέρει δυνατότητες ανάδειξης της άποψης ότι τα μαθηματικά δεν αναπτύσσονται μόνο για πρακτικούς-ωφελιμιστικούς λόγους, αλλά και εξαιτίας εσωτερικών αναγκών. Η συσχέτιση των μαθηματικών με κοινωνικούς και πολιτισμικούς παράγοντες και η επίγνωση της πολυπολιτισμικής τους διάστασης επιτυγχάνονται με την ενσωμάτωση της ιστορίας των μαθηματικών στα μαθηματικά. Η διδασκαλία στην τάξη που χαρακτηρίζεται από μια ιστορικά ενσωματωμένη αντίληψη, επιτρέπει στους μαθητές να αναγνωρίσουν το πολιτισμικό, πολιτικό, κοινωνικό και οικονομικό πλαίσιο της μαθηματικής ανάπτυξης και τον ρόλο των διαφόρων πολιτισμών στην εξέλιξη της επιστήμης των μαθηματικών

(Swetz, 1995). Αυτό σημαίνει ότι οι μαθητές μπορούν να αναλογιστούν για την επίδραση κοινωνικών κανόνων, αντιλήψεων και πρακτικών στην ανάπτυξη των μαθηματικών, αλλά και τον τρόπο με τον οποίο τα μαθηματικά έχουν επιδράσει ή επιδρούν στον τρόπο που οι άνθρωποι ενεργούν και σκέπτονται.

Ο Fauvel (1991, p. 4) αναφέρει δεκαπέντε λόγους που εξηγούν το ενδιαφέρον των εκπαιδευτικών για την ιστορία των μαθηματικών. Σύμφωνα με τον Fried (2001, p.392), αυτοί οι λόγοι μπορούν να κατηγοριοποιηθούν σε τρεις κύριους θεματικούς άξονες:

- η ιστορία εξανθρωπίζει τα μαθηματικά. Αυτό εννοεί και ο Liu (2003, p. 418) όταν υποστηρίζει ότι η ιστορία αποκαλύπτει τις ανθρώπινες όψεις της μαθηματικής γνώσης. Έτσι τα μαθηματικά αποκτούν νόημα ως δραστηριότητα στο πλαίσιο μίας κοινότητας (Furinghetti, 2004)
- η ιστορία των μαθηματικών κάνει τα μαθηματικά πιο ενδιαφέροντα, πιο κατανοητά και πιο προσβάσιμα και
- εισάγει σε έννοιες, προβλήματα και πρακτικές επίλυσης προβλήματος με διαφορετικό τρόπο και για διαφορετικούς λόγους δασκάλους και μαθητές. Ειδικά για τους δασκάλους η ιστορία μπορεί να αποτελέσει έναν οδηγό για τη διδασκαλία (Liu, 2003, p. 419).

2.3 Αντιρρήσεις για την αξιοποίηση της ιστορίας των μαθηματικών στη μαθηματική εκπαίδευση

Παρόλα τα επιχειρήματα που αναπτύχθηκαν και τα οφέλη που προκύπτουν από την αξιοποίηση της ιστορίας των μαθηματικών και της ενσωμάτωσής της στην εκπαιδευτική διαδικασία, καταγράφονται προβληματισμοί και αντιρρήσεις σχετικά με το κατά πόσο είναι εφικτή ή επιθυμητή αυτή η ενσωμάτωση. Από ανασκόπηση της βιβλιογραφίας οι Tzanakis & Arcavi (2000) συνόψισαν την κριτική που ασκείται σε δυο επίπεδα: στο φιλοσοφικό και στο πρακτικό.

Στο φιλοσοφικό επίπεδο τα επιχειρήματα είναι:

- η ιστορία δεν είναι μαθηματικά,
- η ιστορία των μαθηματικών μπορεί να προκαλέσει σύγχυση στους μαθητές παρά να τους βοηθήσει στην καλύτερη κατανόηση του αντικειμένου,

- οι μαθητές μπορεί να έχουν ελλιπή αίσθηση του παρελθόντος, γεγονός που καθιστά την ιστορική πλαισιοποίηση των μαθηματικών αδύνατη, εφόσον δεν προηγείται ευρύτερη εκπαίδευση στη γενική ιστορία,
- η απέχθεια ορισμένων μαθητών για την ιστορία μπορεί να μετατραπεί σε απέχθεια για την ιστορία των μαθηματικών, η οποία θα θεωρηθεί όχι λιγότερη βαρετή από τα μαθηματικά,
- η πρόοδος στα μαθηματικά είναι ο μετασχηματισμός δύσκολων προβλημάτων σε προβλήματα ρουτίνας, επομένως δεν υπάρχει λόγος να κοιτάμε στο παρελθόν,
- η ιστορία μπορεί να αναπαράγει πολιτισμικό ή τοπικιστικό σωβινισμό.

Στο πρακτικό επίπεδο τα επιχειρήματα που προβάλλονται είναι:

- η ενσωμάτωση της ιστορίας των μαθηματικών στη διδακτική πρακτική απαιτεί πολύ χρόνο,
- υπάρχει γενικευμένη έλλειψη πηγών για χρήση στην τάξη,
- υπάρχει έλλειψη ειδικευμένης γνώσης στην πλειοψηφία των εκπαιδευτικών ως αποτέλεσμα ανεπάρκειας ή ακαταλληλότητας των προγραμμάτων εκπαίδευσης των εκπαιδευτικών,
- δεν υπάρχει ξεκάθαρος τρόπος αξιολόγησης και συνήθως ότι δεν αξιολογείται δεν προσελκύει το ενδιαφέρον και την προσοχή.

2.4 Αξιοποίηση της ιστορίας των μαθηματικών στη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών: Συνύπαρξη ή ενσωμάτωση;

Θεωρητικοί και ερευνητές ακόμη κι αν επιχειρηματολογούν υπέρ μιας διδακτικής προσέγγισης, η οποία θα αξιοποιεί την ιστορία των μαθηματικών διαφωνούν ως προς τον τρόπο ένταξης της στη μαθησιακή διαδικασία. Έτσι μιλάμε για συνύπαρξη (Fried, 2001) και για ενοποίηση ή ενσωμάτωση (Tzanakis & Arcavi, 2000; Barbin, 2000) των δύο γνωστικών αντικειμένων. Σύμφωνα με την Furinghetti (1997, p.61), η λέξη ενσωμάτωση της ιστορίας στη διδασκαλία των μαθηματικών, εκφράζει καλύτερα την ιδέα της αποδοτικής διδασκαλίας και της αποτελεσματικής ανάλυσης των διαδικασιών μάθησης και κατανόησης. Θεωρούμε τους όρους αυτούς διαφορετικούς, οι οποίοι προκύπτουν από διαφορετικές φιλοσοφικές θεωρήσεις και ιδεολογικές παραδοχές για τον ρόλο της εκπαίδευσης και αντανακλώνται στους δύο πολυσυζητημένους σήμερα - λόγω της εισαγωγής των νέων Δ.Ε.Π.Π.Σ. – Α.Π.Σ[4]. - όρους διεπιστημονικότητα και διαθεματικότητα.

Εντοπίζοντας ο Fried (2001, p. 391) το πρόβλημα που προκύπτει με την εισαγωγή ιστορικών κειμένων ή την ιστορική προσέγγιση στη εκπαιδευτική πράξη, η οποία μπορεί να οδηγήσει στην ελαχιστοποίηση της χρήσης της ιστορίας των μαθηματικών ή στη διαστρέβλωσή της, προτείνει δύο λύσεις: τον ριζοσπαστικό διαχωρισμό (radical saparation) και τη ριζοσπαστική προσαρμογή (radical accommodation).

Η πρώτη λύση προκύπτει από την προσθήκη στο ήδη υπάρχον Αναλυτικό Πρόγραμμα ενός νέου Αναλυτικού Προγράμματος. Μαθηματικά και ιστορία παρότι έχουν διακριτούς ρόλους σε ορισμένες περιπτώσεις συνυπάρχουν. Κείμενα, βιογραφίες ή απομονωμένα προβλήματα αποτελούν την τομή των δύο γνωστικών αντικειμένων. Αυτός ο τρόπος σύμφωνα με τους Tzanakis & Arcavi, (2000, p.208) λειτουργεί επικουρικά. Από μόνος του δεν μπορεί να αλλάξει τον πυρήνα της διδασκαλίας του μαθηματικού περιεχομένου, αν και μπορεί να επηρεάσει τις μαθησιακές εμπειρίες. Οι Siu & Siu υποστηρίζουν ότι η εισαγωγή της ιστορίας των μαθηματικών ως ξεχωριστό γνωστικό αντικείμενο δεν προσφέρει σε πρακτικό επίπεδο ούτε είναι η καταλληλότερη προσέγγιση. Για τους ερευνητές, αν υπάρχει κάποιο πιο αποτελεσματικό διακριτό γνωστικό αντικείμενο αυτό θα μπορούσε να είναι η «ανάπτυξη (εξέλιξη) των μαθηματικών ιδεών» (1979, p. 566).

Η δεύτερη λύση, της ριζοσπαστικής προσαρμογής, προϋποθέτει την αλλαγή και προσαρμογή του Αναλυτικού Προγράμματος σε ιστορικές καταστάσεις ή σύμφωνα με κάποιο ιστορικό μοντέλο. Μια τέτοια ενσωμάτωση της ιστορίας των μαθηματικών στη διδακτική δραστηριότητα, θέτει ως προτεραιότητα την *«επανακατασκευή (reconstruction), στην οποία η ιστορία υπεισέρχεται σιωπηρά ...και μπορούν να χρησιμοποιηθούν έννοιες, μέθοδοι και συμβολισμοί οι οποίοι εμφανίστηκαν αργότερα (ιστορικά) από το θέμα που εξετάζεται, έχοντας κατά νου ότι ο κύριος διδακτικός στόχος είναι να κατανοηθούν τα μαθηματικά στη σύγχρονη μορφή τους»* (Tzanakis &

[4] Εδώ θα πρέπει να σημειωθεί ότι σε πολλές χώρες δίνονται μόνον γενικές κατευθύνσεις με τα λεγόμενα σύλλαμπους, ενώ άλλες έχουν σύλλαμπους και κουρίκουλα. Να προστεθεί ότι ανάμεσα στα Ενιαία Πλαίσια Προγραμμάτων Σπουδών (Ε.Π.Π.Σ.)/ Σύλλαμπους (Syllabus) και τα Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών (Α.Π.Σ.)/ κουρίκουλα (curriculum) υπάρχει διαφορά. Στα Α.Π.Σ. οι σκοποί αναλύονται σε στόχους κατά γνωστικό αντικείμενο, σε περιεχόμενα, δίνονται μεθοδολογικές κατευθύνσεις και αξιολογούνται βάση κριτηρίων που επιτρέπουν την ανατροφοδότηση. Αντίθετα τα Ε.Π.Π.Σ./ σύλλαμπους δίνουν μόνο γενικές κατευθύνσεις σε σκοπούς, περιεχόμενα και επιδιωκόμενα αποτελέσματα -δεξιότητες-. Μερικές φορές δίνουν και προδιαγραφές συγγραφής σχολικών βιβλίων.

Arcavi, 2000, p. 210). Δίνεται λοιπόν έμφαση, όχι στη χρήση αλλά στο πως θεωρίες, έννοιες, μέθοδοι, μπορούν να δώσουν μια απάντηση σε συγκεκριμένα προβλήματα και ερωτήσεις. Επομένως η χρήση του μαθηματικού περιεχομένου προκύπτει από την αναγκαιότητα επίλυσης ενός θέματος. Σύμφωνα με αυτή την «εμπνευσμένη από την ιστορία» προσέγγιση, η οποία στηρίζεται σε ένα σχήμα τεσσάρων βημάτων, προκύπτουν πλεονεκτήματα αλλά και σημεία που απαιτούν την προσοχή δασκάλων και μαθητών (p.209-211).

Στο πλαίσιο του μοντέλου της ριζοσπαστικής προσαρμογής θα πρέπει να συζητηθεί και η προσέγγιση της ανάπτυξης βαθύτερης επίγνωσης, όχι μόνο μαθηματικής αλλά και επίγνωσης του κοινωνικο-πολιτισμικού πλαισίου μέσα στο οποίο αναπτύσσονται τα μαθηματικά. (Tzanakis & Arcavi, 2000, p.208). Στην πρώτη περίπτωση η επίγνωση αφορά την εσωτερική φύση των μαθηματικών, ενώ στη δεύτερη η επίγνωση αφορά την εξωτερική φύση των μαθηματικών δραστηριοτήτων (pp.211-212).

2.5 Τρόποι αξιοποίησης της ιστορίας των μαθηματικών στην εκπαιδευτική διαδικασία

Παρακάτω αναφέρονται προτάσεις, ιδέες και τρόποι ενσωμάτωσης και χρήσης διδακτικού υλικού το οποίο υποστηρίζει στην εκπαιδευτική πράξη τη λογική της ενσωμάτωσης της ιστορίας των μαθηματικών στη μαθηματική εκπαίδευση.

Σύμφωνα με την κατηγοριοποίηση που προτείνουν οι Tzanakis & Arcavi (2000, p.212) το υλικό μπορεί να είναι:

- Πρωτογενές υλικό, (αυθεντικά μαθηματικά κείμενα)
- Δευτερογενές υλικό (αφηγήσεις, ερμηνείες, ανακατασκευές)
- Διδακτικό υλικό.

Προκύπτει από την ανάλυση των τριών αυτών κατηγοριών η ανάγκη κατασκευής και ανάπτυξης κατάλληλου διδακτικού υλικού, το οποίο θα μπορεί είτε να χρησιμοποιηθεί στην τάξη είτε να αποτελεί πηγή για τους εκπαιδευτικούς. Το υλικό θα πρέπει να έχει ως στόχο την ενεργοποίηση και καθοδήγηση του εκπαιδευτικού, τη βελτίωση της διδακτικής διαδικασίας και τον εμπλουτισμό του ρεπερτορίου των διαθέσιμων μεθόδων από τη μεριά του εκπαιδευτικού για την κατανόηση των προβλημάτων που αντιμετωπίζουν οι μαθητές ή του προσωπικού τρόπου μάθησης. Δεν είναι εύκολη η επιλογή ιστορικού υλικού, ώστε να ενσωματωθεί στην τρέχουσα διδακτική πρακτική, όπως αυτή καθορίζεται από το Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών. Απαιτείται, καταρχήν, επαρκής γνώση της ιστορίας των μαθηματικών από τους δασκάλους των μαθηματικών. Απαιτείται υποστήριξη ενός τέτοιου προσανατολισμού από τα προγράμματα σπουδών, σαφώς και συγκεκριμένα. Απαιτούνται βοηθήματα, για κάθε ηλικιακό επίπεδο, με αποδέκτες δάσκαλους και μαθητές, ώστε η ενσωμάτωση της ιστορίας στο μάθημα των μαθηματικών να βοηθάει στην κατανόηση, να κάνει το μάθημα πιο ελκυστικό, να καταδεικνύει την ανθρώπινη διάσταση της μαθηματικής εξέλιξης και να μη μετατραπεί σε ένα ακόμα φορτίο στην πλάτη των μαθητών και των δασκάλων.

Οι Tzanakis & Arcavi (2000) δίνουν, μέσω παραδειγμάτων, ιδέες και προτείνουν τρόπους εφαρμογής και ενσωμάτωσης της ιστορίας στη μαθηματική εκπαίδευση. Προτείνεται εκτός των άλλων και η αξιοποίηση του διαδικτύου ως πηγή και ως μέσο επικοινωνίας. Ιδέες και παραδείγματα για τους τρόπους χρήσης και προσέγγισης των ιστορικών πηγών δίνουν με απλό και κατανοητό τρόπο (με μορφή λίστας) και οι Barrow-Green & Fauvel (2000) .

Ο Rogers προτείνει εύκολα προσβάσιμο έντυπο υλικό (βιβλία, εγκυκλοπαίδειες, λεξικά) που μπορεί να φανεί χρήσιμο στους εκπαιδευτικούς (1991, p.48), όπως επίσης και ιδέες για τους τρόπους χρήσης του υλικού.

Ο Fried (2001) αναφέρει προγράμματα ενσωμάτωσης της ιστορίας που ανήκουν στο παράδειγμα της ριζοσπαστικής προσαρμογής. Υποστηρίζεται η ανάγκη εμπλουτισμού της εκπαίδευσης όλων των εκπαιδευτικών. Στο πλαίσιο αυτού του παραδείγματος αναδεικνύεται η ανθρωπιστική διάσταση των μαθηματικών και προβάλλεται η ανθρώπινη δημιουργικότητα.

Η Confrey (1990, p.111) ανάμεσα σε άλλα χαρακτηριστικά των δυνατών κατασκευών αναφέρει:

- την ενσωμάτωση μιας ποικιλίας εννοιών
- την ιστορική συνέχεια
- δημιουργία δεσμών μεταξύ διαφόρων συμβολικών συστημάτων.

Θεωρούμε ότι αυτά τα τρία χαρακτηριστικά μπορούν να γίνουν αντικείμενο διαπραγμάτευσης μέσα από τη λογική ενσωμάτωσης της ιστορίας των μαθηματικών στην εκπαιδευτική διαδικασία. Υπό αυτό το πρίσμα, το διδακτικό μοντέλο έξι στοιχείων που ερευνήθηκε από την Confrey (1990, p 115) στο πλαίσιο μιας εποικοδομητικής διδασκαλίας, θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί σε μαθησιακά περιβάλλοντα που ενσωματώνουν τη λογική της ιστορία των μαθηματικών στην εκπαίδευση.

Ο Siu αναγνωρίζει ότι η χρήση της ιστορίας δεν αποτελεί πανάκεια για την βελτίωση της βαθμολογίας σε εξετάσεις, αλλά πιστεύει ότι «...κάνει τη μάθηση στα μαθηματικά μια ζωντανή και γεμάτη νόημα εμπειρία, έτσι ώστε η μάθηση να έρθει πιο εύκολα και να φτάσει βαθύτερα.» (2000, p.154). Προτείνει τέσσερις στρατηγικές για τη χρήση της ΙτΜ (για λόγους απόδοσης χρησιμοποιείται η αγγλική γλώσσα) :

A is for Anecdotes

B is for Broad Outline

C is for Content and

D is for Development of mathematical ideas.

Κάποιες διδακτικές προσεγγίσεις χρησιμοποιούν ιστορικά κείμενα από πρωτότυπες ή δευτερεύουσες πηγές, ως ουσιώδες υλικό για τη διδασκαλία, θεωρώντας εκτός των άλλων, ότι οι πρωτότυπες πηγές βοηθούν τους μαθητές να δουν τα μαθηματικά ως μια ανθρώπινη δραστηριότητα (Arcavi & Bruckheimer, 2000).

Άλλοι τρόποι εργασίας που είναι κατάλληλοι για μια επαρκή ενσωμάτωση της ιστορίας των μαθηματικών στη διδασκαλία, είναι τα προβλήματα και η επίλυσή τους. Τα προβλήματα και η επίλυση των προβλημάτων βρίσκονται στον πυρήνα της ιστορικής ανάπτυξης των μαθηματικών και αποτελούν μέρος του υλικού που μπορεί να χρησιμοποιηθεί στη διδακτική πράξη (Swetz, 2000, p, 65). Ιστορικά προβλήματα όπως για παράδειγμα το πρόβλημα των γεφυριών του Königsberg το οποίο ώθησε τον Euler στη δημιουργία της Τοπολογίας, μπορούν να εισάγουν τους μαθητές στη θεωρία των γραφημάτων (Ernest, 1998, p,25).

Η δραματοποίηση της γέννησης και εξέλιξης των μαθηματικών ιδεών και εννοιών μπορεί να αποτελέσει μία τεχνική ενσωμάτωσης της ιστορίας των μαθηματικών στα μαθηματικά. Η δραματοποίηση μπορεί να έχει διάφορες μορφές ανάλογα με τον διδακτικό σχεδιασμό ξεκινώντας από απαγγελία (δυνατή ανάγνωση) έως εκτέλεση θεατρικής παράστασης (Hitchcock, 1992, p. 21).

Με βάση τα παραπάνω η διδασκαλία των μαθηματικών καθίσταται μία σύνθετη προσπάθεια, αφού θα πρέπει να επιτρέπει την παράλληλη εξέλιξη των διαδικασιών και των εννοιών. Άλλωστε οι έννοιες αποκτούν νόημα μέσα από τις διαδικασίες παραγωγής και ανάδειξής τους. Αλλά και οι διαδικασίες βασίζονται σε κάποιες ήδη αφομοιωμένες έννοιες. Η παράλληλη εξέλιξη διαδικασιών και εννοιών αποτελεί προϋπόθεση της μάθησης με κατανόηση. Σε διαφορετική περίπτωση οι μαθητές μπορεί να «μαθαίνουν» μαθηματικά χωρίς να τα καταλαβαίνουν, αφού η χρήση κανόνων που οδηγούν σε σωστές λύσεις δε συνεπάγεται και κατανόηση.

Αναδεικνύεται, επομένως, ο ρόλος του δασκάλου, ο οποίος έχοντας θεωρητική κατάρτιση αλλά και διδακτική επάρκεια μπορεί να πάρει στους ώμους ένα τέτοιο βαρύ φορτίο. Η παραδοχή αυτή με τη σειρά της οδηγεί και σε θέματα εκπαίδευσης και επιμόρφωσης των εκπαιδευτικών, ώστε οι ίδιοι να μπορούν να αναλαμβάνουν πρωτοβουλίες και δράσεις προς όφελος των μαθητών τους και της εκπαίδευσης γενικότερα.

Αυτό αποτέλεσε, άλλωστε, και έναν από τους στόχους της παρούσας διδακτικής παρέμβασης: τη γνωριμία και ευαισθητοποίηση των μελλοντικών δασκάλων με τις μεθόδους και τις πρακτικές μιας διδακτικής προσέγγισης, η οποία ενσωματώνει στην πράξη την ιστορία των μαθηματικών και τα μαθηματικά.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΡΙΤΟ

Το βιβλίο της διδακτικής παρέμβασης: «Ο άνθρωπος που μετρούσε»

Στο κεφάλαιο αυτό αποδίδεται περιληπτικά το βιβλίο της διδακτικής παρέμβασης. Συζητείται επίσης το είδος και το ύφος του βιβλίου. Δίνονται ορισμένα βιογραφικά στοιχεία για τον συγγραφέα του, καθώς και πληροφορίες για τις εκδόσεις και τις μεταφράσεις του βιβλίου. Τέλος, αναφέρονται τα κριτήρια σύμφωνα με τα οποία επιλέχθηκε το συγκεκριμένο λογοτεχνικό βιβλίο.

3.1 «Ο άνθρωπος που μετρούσε»

«Ο άνθρωπος που μετρούσε» αποτελείται από 34 κεφάλαια, κάθε ένα από τα οποία πραγματεύεται ένα περιστατικό ή μια δοκιμασία την οποία καλείται να φέρει με επιτυχία σε πέρας ο ήρωας. Η αφιέρωση του συγγραφέα "στους επτά μεγάλους γεωμέτρες χριστιανούς ή αγνωστικιστές: Descartes, Pascal, Newton, Leibniz, Euler, Lagrange, Comte και στον μεγάλο μουσουλμάνο φιλόσοφο μαθηματικό και αστρονόμο Al Khwarizmi" αποτελεί μια πρώτη ένδειξη της θεματολογίας του.

Ο άνθρωπος που μετρούσε, ο ήρωας του βιβλίου, ταξιδεύει τον αναγνώστη στον εξωτικό αραβικό κόσμο του 1300, όπου με τις εξαιρετικές μαθηματικές ικανότητές του επιλύει διαφωνίες, παρέχει σοφές συμβουλές, αντιμετωπίζει και νικάει επικίνδυνους εχθρούς, κερδίζει φήμη και πλούτη, και τέλος αμείβεται αισθηματικά αφού καταφέρνει να παντρευτεί την εκλεκτή της καρδιάς του. «Ο άνθρωπος που μετρούσε» είναι ο Μπέρεμιζ Σαμίρ, ένας νεαρός με αξιοσημείωτες μαθηματικές ικανότητες. Ο ήρωας-αφηγητής του βιβλίου συναντά τον Μπέρεμιζ ενώ ταξιδεύει προς Βαγδάτη και τον πείθει να τον ακολουθήσει. Καθοδόν προς τη Βαγδάτη θα συμβούν διάφορα γεγονότα και στο καθένα από αυτά ο Μπέρεμιζ θα χρησιμοποιήσει τις ικανότητές του για να διασκεδάσει ταξιδιώτες, να δώσει τέλος σε διαφωνίες και να βρει δίκαιες και σοφές λύσεις σε προβλήματα που έδειχναν άλυτα. Στο τέλος του βιβλίου ο Μπέρεμιζ κατακτά και πάλι χάρη στις ικανότητές του, το χέρι της αγαπημένης του και «ζουν αυτοί καλά και εμείς καλύτερα».

Με βάση τα κύρια χαρακτηριστικά που εντοπίζονται στα κείμενα της μαθηματικής λογοτεχνίας[5] θεωρούμε ότι το βιβλίο αυτό κινείται ανάμεσα στην προσχηματική μυθοπλασία και τη δομική μαθηματική λογοτεχνία. Συγκεκριμένα στην προσχηματική μυθοπλασία ο μύθος χρησιμοποιείται ως πρόσχημα για τη μετάδοση γνώσεων με τρόπο περισσότερο εύληπτο και αποδεκτό. Βεβαίως, αυτό το λογοτεχνικό είδος δεν αφορά αποκλειστικά τα μαθηματικά. Σε όλα σχεδόν τα γνωστικά αντικείμενα έχει επιχειρηθεί αυτή η μέθοδος προσέγγισης με λιγότερη ή περισσότερη επιτυχία. Ωστόσο, με δεδομένη τη δυσπιστία και τον φόβο απέναντι στα μαθηματικά, που η πλειοψηφία των πολιτών κουβαλά από τη σχολική περίοδο της ζωής τους, ένα τέτοιο εγχείρημα σε αυτόν τον τομέα αποκτά ξεχωριστή σημασία. Με τον όρο «δομική» μαθηματική λογοτεχνία αναφέρονται έργα που εκτός από τη θεματολογία τους συνυφαίνουν τα μαθηματικά και στη δομή τους. Το χαρακτηριστικότερο παράδειγμα αυτής της κατηγορίας είναι το Βιβλίο Κόλαση (εκδ. Opera) του Κάρλο Φραμπέτι. Φυλακισμένος στα βάθη μιας κόλασης δομημένης σε κύκλους κατά το δαντικό πρότυπο, ο κεντρικός ήρωας πρέπει να φέρει σε πέρας τους άθλους που του αναθέτει ο φύλακας διάβολός του, νικώντας τον σε μαθηματική ευρηματικότητα. Ο αναγνώστης που έχει μαθηματικές γνώσεις θα τον παρακολουθήσει να ξεκινά από το παράδοξο του Ράσελ και τη θεμελίωση των συνόλων και σε κάθε νέο κύκλο να κατακτά κι από ένα νέο μαθηματικό σύνολο: τους φυσικούς, τους ακεραίους, τους ρητούς κ.ο.κ. Ωστόσο, η μαθηματική εξέλιξη, ευδιάκριτη για τον ειδικό, περνάει απαρατήρητη για τον «κοινό θνητό» που απλώς απολαμβάνει τη δομή χωρίς να συνειδητοποιεί τις ευθείες αναφορές στα συγκεκριμένα θεωρήματα (Μιχαηλίδης, 2004). Ανάλογης αντιμετώπισης από «ειδικούς» ή «μη» αναγνώστες μπορεί να τύχει και «ο άνθρωπος που μετρούσε».

Για να γίνει κατανοητό το περιεχόμενο του βιβλίου θα επιχειρήσουμε μια σύντομη επισκόπηση του, γνωρίζοντας εκ των προτέρων τους περιορισμούς που μια τέτοια προσπάθεια θέτει και τυχόν προβλήματα παρανόησης που μπορεί να δημιουργήσει.

Ο άνθρωπος που μετρούσε, ο Μπέρεμιζ, είναι ο φανταστικός ήρωας του βιβλίου. Προικισμένος με εκπληκτικές μαθηματικές ικανότητες και ηθικές αρετές, μέσα από

[5] Ανάλυση του όρου «μαθηματική λογοτεχνία» έχει γίνει στο δεύτερο κεφάλαιο του πρώτου μέρους

ένα ταξίδι του στην πόλη των χαλίφηδων, τη Βαγδάτη, του δίνεται η ευκαιρία να ξεδιπλώσει την μαθηματική του ευστροφία και να δώσει λύσεις τόσο σε καθημερινά προβλήματα, όσο και σε προβλήματα και γρίφους που απασχολούν επί αιώνες τους ανθρώπους.

Η ιστορία ξεκινάει από τη στιγμή που ο αφηγητής συναντάει στην έρημο έναν νεαρό βοσκό από την Περσία, τον Μπέρεμιζ, συνομιλεί μαζί του, μαθαίνει για την ζωή του και διαπιστώνει τις εκπληκτικές μαθηματικές δεξιότητές του. Αποφασίζουν να συνταξιδέψουν με προορισμό την Βαγδάτη, όπου υπάρχουν πολλές δυνατότητες εργασίας για έναν τόσο ευφυές άτομο σαν τον Μπέρεμιζ. Στον δρόμο ο άνθρωπος που μετρούσε λύνει δίκαια το πρόβλημα των 35 καμηλών και κερδίζει τον θαυμασμό των άλλων ανθρώπων.

Χάρη στο κοφτερό μυαλό του αρχίζει να αποκτά μεγάλη φήμη. Φτάνοντας στην Βαγδάτη, δέχεται πρόταση για να αναλάβει την θέση του γραμματέα του βεζίρη. Η διαμονή του εκεί συνοδεύεται και από την επίλυση των προβλημάτων του κοσμηματοπώλη, του μερισμού των βαρελιών κρασιού, το μέτρημα των πουλιών που έχει ως αποτέλεσμα την τελική απελευθέρωση τους. Επιπλέον, ξεδιπλώνει και απίθανους μαθηματικούς συσχετισμούς (π.χ τέσσερα τεσσάρια, τετράγωνη φιλία μεταξύ των αριθμών) που φανερώνουν όχι μόνο τη ευφυΐα του αλλά και τις μαθηματικές του γνώσεις.

Στην συνέχεια αναλαμβάνει να διδάξει μαθηματικά στην κόρη του σεΐχη, Τελασίμ. Η μικρή μαθαίνει για την μαθηματική επιστήμη, τους μεγάλους Έλληνες και Άραβες μαθηματικούς, καθώς και το πώς συνδέονται τα μαθηματικά με τις άλλες τέχνες αλλά και γενικότερα με τη ζωή.

Ο χαλίφης αποφασίζει να υποβάλλει τον Μπέρεμιζ σε μια δύσκολη αναμέτρηση. Θα πρέπει να απαντήσει σε επτά ερωτήσεις που θα του υποβάλλουν επτά σημαντικοί σοφοί της εποχής. Για μία ακόμη φορά, ο άνθρωπος που μετρούσε έχοντας ως στήριγμα τον Αλλάχ και το ερωτικό γράμμα της Τελασίμ, καταφέρνει να απαντήσει σωστά σε αυτές τις ερωτήσεις, οι οποίες παρότι κάποιες από αυτές αφορούσαν την θρησκεία, την ιστορία, την αστρονομία συνδέονταν με την μαθηματική επιστήμη.

Ο χαλίφης για τον ανταμείψει του προτείνει μια υψηλή θέση στο παλάτι της Βαγδάτης. Όμως ο μέχρι τέλους ταπεινός Μπέρεμιζ, μη δίνοντας σημασία στα υλικά αγαθά και καθοδηγούμενος από το συναίσθημα του έρωτα ζητά ως αντίτιμο το χέρι της Τελασίμ. Για να το αποκτήσει τίθεται ένας ακόμα όρος. Να λύσει το πρόβλημα των κοριτσιών με τα μαύρα και γαλανά μάτια. Τα μαθηματικά τον βοηθούν για μια ακόμη φορά και τον οδηγούν στον έρωτα.

Αν κοιτάξουμε αναλυτικότερα, διαπιστώνουμε ότι το βιβλίο αυτό δεν αποτελεί μια απλή καταγραφή μαθηματικών εννοιών και προβλημάτων. Τους μαθηματικούς γρίφους και τα προβλήματα πλαισιώνουν διάφοροι μύθοι που σχετίζονται τόσο με την επιστήμη των μαθηματικών όσο και με διάφορα ηθικά διδάγματα. Με αυτό τον τρόπο διατηρείται αμείωτο το ενδιαφέρον των αναγνωστών και αποφεύγεται η μονότονη αφήγηση. Επιπλέον μέσα στο μυθιστόρημα παρατίθενται και διάφορα ποιήματα τόσο από τον λογοτεχνικό όσο και από τον θρησκευτικό χώρο. Τα ποιήματα δίνουν λυρικό τόνο στην περιγραφή και καταδεικνύουν τα συναισθήματα και τις διαθέσεις των ηρώων[6] .

Ο συγγραφέας του βιβλίου, ο Malba Tahan[7] δεν υπάρχει και δεν υπήρξε ποτέ. Είναι γέννημα της φαντασίας του βραζιλιάνου συγγραφέα και εκπαιδευτικού, Julio Cesar de Mello e Souza (1895-1974), ο οποίος εκτός από δάσκαλος θήτευσε και ως καθηγητής στη Σχολή Καλών Τεχνών και στην Αρχιτεκτονική Σχολή του Πανεπιστημίου του Ρίο ντε Τζανέιρο. Διάσημος στη Βραζιλία αλλά και διεθνώς από τα βιβλία του, τα περισσότερα από τα οποία εκδόθηκαν με το ψευδώνυμο Malba Tahan και Breno de Alencar Bianco. Τον έχουν αποκαλέσει ως «τον μοναδικό δάσκαλο μαθηματικών που έχει γίνει ποτέ γνωστός όσο ένας ποδοσφαιριστής». Ο Souza έχει γράψει 69 μυθιστορήματα και 51 επιστημονικά συγγράμματα, οι πωλήσεις των οποίων μέχρι το 1995 είχαν φτάσει τα δύο εκατομμύρια αντίτυπα. Στο κρατίδιο του Ρίο ντε Τζανέιρο η επέτειος της γέννησης του (6 Μαΐου) γιορτάζεται ως η Μέρα του Μαθηματικού.

Ο Souza στάθηκε κριτικά απέναντι στις διδακτικές μεθόδους που χρησιμοποιούνταν στις βραζιλιάνικες τάξεις. Ισχυριζόταν ότι «*ο μαθηματικός είναι ένας σαδιστής που του αρέσει να τα κάνει όλα όσο πιο δύσκολα γίνονται*». Έτσι ενώ γοήτευε με τις μεθόδους του και το προσωπικό του στυλ μαθητές και φοιτητές, εύρισκε αντίθετους

[6] Η συνύπαρξη μαθηματικών και ποίησης «νομιμοποιείται» στο βιβλίο από τις συνεχείς αναφορές στον Πέρση μαθηματικό και ποιητή Ομάρ Καγιάμ (1048-1131 μ.Χ).

[7] Περισσότερες πληροφορίες για η ζωή και το έργο του Julio Cesar de Mello e Souza στο http://en.wikipedia.org/wiki/Malba_Tahan και στο http://www.brazzilmag.com/content/view/149/41

τους συναδέλφους του, οι οποίοι θεωρούσαν τη σύνδεση μαθηματικών με την καθημερινή ζωή απαξιωτική.

Ξεκίνησε να γράφει από νεαρή ηλικία. Όταν σε ηλικία 23 ετών απέτυχε να δημοσιεύσει διηγήματα του σε εφημερίδα, χρησιμοποίησε το όνομα ενός φανταστικού αμερικάνου συγγραφέα. Αυτή η ιδέα άνοιξε τις πόρτες στον Souza, αλλά ταυτόχρονα τον έπεισε να χρησιμοποιήσει ψευδώνυμο. Επέλεξε ένα αραβικό όνομα γιατί θεωρούσε ότι οι Άραβες ήταν αξεπέραστοι στην τέχνη της αφήγησης. Επί χρόνια μελετούσε την αραβική γλώσσα και την ισλαμική κουλτούρα. Έτσι χωρίς να έχει ταξιδέψει ποτέ στα μέρη τα οποία εξιστορούσε γνώριζε τόσες λεπτομέρειες όσες κι ένας ντόπιος. Ψευδώνυμο χρησιμοποιούσε επίσης και για το υποτιθέμενο πρόσωπο του μεταφραστή. Όταν αργότερα έγινε γνωστή η ταυτότητα του με ειδική άδεια του Προέδρου της Βραζιλίας πρόσθεσε το Malba Tahan στο όνομά του.

«Ο άνθρωπος που μετρούσε» εκδόθηκε για πρώτη φορά στη Βραζιλία το 1949. Είναι μια σειρά ιστοριών εμπνευσμένων από τις «Χίλιες και μια νύχτες», οι οποίες δομούνται γύρω από μαθηματικά προβλήματα, παράδοξα και ιστορικά μαθηματικά επιτεύγματα.

Στα Ελλάδα το βιβλίο εκδόθηκε το 2002 από τις εκδόσεις Κάτοπτρο σε μετάφραση του Στάμου Τσιτσώνη. Στο τέλος του βιβλίου υπάρχουν «Σχόλια της ελληνικής έκδοσης» που επιμελήθηκε ο Μιχάλης Λάμπρου. Εδώ ο αναγνώστης μπορεί να βρει χρήσιμα ιστορικά στοιχεία που βοηθούν στην κατανόηση του βιβλίου όπως επίσης και επεξηγήσεις του μαθηματικού περιεχομένου το οποίο μπορεί να δυσκολεύει τον «μη» ειδικό.

3.2 Κριτήρια επιλογής του βιβλίου

Ο «Άνθρωπος που Μετρούσε» επιλέχθηκε μεταξύ άλλων λογοτεχνικών βιβλίων γιατί διαπιστώθηκε ότι πληροί τις προϋποθέσεις, ανταποκρίνεται στον σκοπό και τους στόχους της έρευνας και ανταποκρίνεται στα κριτήρια που τέθηκαν κατά τον σχεδιασμό της έρευνας. Συγκεκριμένα:

- Αποτελεί ένα λογοτεχνικό κείμενο όπου κυρίαρχο στοιχείο της δομής του αποτελούν τα μαθηματικά

- Η γλώσσα που χρησιμοποιείται είναι απλή και κατανοητή και επομένως δεν απαιτείται ιδιαίτερη προσπάθεια, η οποία πιθανά θα αποσπούσε την προσοχή από το μαθηματικό περιεχόμενο
- Η σειραϊκή διάρθρωση των κεφαλαίων ανταποκρινόταν στη λογική των εβδομαδιαίων διδακτικών μας παρεμβάσεων.
- Η αυτοτέλεια των κεφαλαίων επέτρεπε την εβδομαδιαία διαπραγμάτευση τους χωρίς επιπτώσεις στην πλοκή της αφήγησης.
- Οι συνεχείς ιστορικές αναφορές σε μεγάλους μαθηματικούς ή μαθηματικά επιτεύγματα δημιουργούσαν ένα μαθησιακό περιβάλλον, από το οποίο προέκυπτε η ενσωμάτωση των μαθηματικών με την ιστορία των μαθηματικών ως ο πιο κατάλληλος ίσως τρόπος διαπραγμάτευσης του μαθηματικού περιεχομένου.
- Οι ιστορικές αναφορές μπορούσαν να αποτελέσουν τη βάση πάνω στην οποία σχεδιάστηκε το διδακτικό υλικό, το οποίο ενσωμάτωνε στη διδακτική πρακτική τα μαθηματικά με την ιστορία τους.

Έχοντας επιλέξει το λογοτεχνικό βιβλίο, το οποίο ικανοποιούσε τις ανάγκες της έρευνάς μας, προχωρήσαμε στην παραγωγή διδακτικού υλικού (φύλλων εργασίας) και στον σχεδιασμό και στην εφαρμογή της έρευνας για την οποία γίνεται λόγος στο δεύτερο μέρος της εργασίας.

Β΄ ΜΕΡΟΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΕΤΑΡΤΟ

Μεθοδολογικό πλαίσιο

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται και αιτιολογείται η μεθοδολογία της έρευνας: αναφέρονται ο σκοπός, οι στόχοι και τα ερευνητικά ερωτήματα και αιτιολογείται η επιλογή των μεθόδων της διεξαγόμενης έρευνας η οποία πραγματοποιήθηκε σε τρία στάδια: του σχεδιασμού, της εφαρμογής και της αξιολόγησης. Παρουσιάζονται όλα τα στοιχεία που αφορούν το δείγμα, τον σχεδιασμό των διδακτικών παρεμβάσεων και τα εργαλεία συλλογής δεδομένων: την αρχική συνέντευξη, την συμμετοχική παρατήρηση και το τελικό ερωτηματολόγιο.

4.1 Σκοποί, στόχοι και ερευνητικά ερωτήματα

Αφορμή για την παρούσα έρευνα αποτέλεσε ο διάλογος που λαμβάνει χώρα τα τελευταία χρόνια ανάμεσα στα μέλη της παγκόσμιας αλλά και ελληνικής ακαδημαϊκής κοινότητας για τον ρόλο που μπορεί να έχει η ιστορία των μαθηματικών στη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών.

Η εισαγωγή στην εκπαιδευτική πραγματικότητα του Διαθεματικού Ενιαίου Πλαισίου Προγραμμάτων Σπουδών καθιστά αναγκαία τη διερεύνηση της θέσης, την οποία μπορεί να έχει σε αυτό μια προσέγγιση ενσωμάτωσης της ιστορίας των μαθηματικών στη μαθηματική εκπαίδευση.

Προκύπτουν λοιπόν ερωτήματα :

- Ποιος είναι ο ρόλος και ποια η θέση της ιστορίας των μαθηματικών στη σύγχρονη ελληνική εκπαιδευτική πραγματικότητα;
- Γνωρίζουν οι εκπαιδευτικοί αυτή την εναλλακτική μέθοδο προσέγγισης των μαθηματικών από τη στιγμή που δεν αποτελεί επιλογή των επίσημων εκπαιδευτικών φορέων;

- Τι δυνατότητες και ποια διδακτικά εργαλεία έχει κάποιος στη διάθεση του αν παρόλα αυτά επιθυμεί να ενσωματώσει στην εκπαιδευτική διαδικασία την ιστορία των μαθηματικών και τα μαθηματικά;

Όπως ήδη αναφέρθηκε σκοπός της έρευνας, ήταν ο σχεδιασμός, η παραγωγή, η διδακτική εφαρμογή και η αξιολόγηση εκπαιδευτικού υλικού, το οποίο ενσωματώνει την ιστορία των μαθηματικών στα μαθηματικά και στη μαθηματική εκπαίδευση γενικότερα.

Λαμβάνοντας υπόψη όσα αναφέρθηκαν στα προηγούμενα κεφάλαια, οριοθετήσαμε τους επιμέρους στόχους με βάση τα παρακάτω ερευνητικά ερωτήματα:

1. Μπορεί ένα λογοτεχνικό κείμενο να χρησιμοποιηθεί σε μια προσέγγιση που ενσωματώνει στην πράξη την ιστορία των μαθηματικών με τα μαθηματικά;
2. Ποιες είναι οι επιπτώσεις από την υλοποίηση μιας τέτοιας προσέγγισης στην εκπαιδευτική διαδικασία;
3. Ποιες είναι οι επιπτώσεις στον τρόπο που οι συμμετέχοντες αντιλαμβάνονται τη σχέση τους με τα μαθηματικά μέσα από μία τέτοια προσέγγιση;
4. Μπορεί η συμμετοχή σε μια τέτοια προσέγγιση να οδηγήσει σε υιοθέτηση πρακτικών και μεθόδων ενσωμάτωσης στην εκπαιδευτική πράξη της ιστορίας των μαθηματικών με τα μαθηματικά;

Έτσι ως επιμέρους στόχοι καθορίστηκαν οι εξής:

- Η διερεύνηση των τρόπων αξιοποίησης ενός λογοτεχνικού κειμένου στην κατεύθυνση της ενσωμάτωσης της ιστορίας των μαθηματικών με τα μαθηματικά και οι επιπτώσεις από την υλοποίηση μιας τέτοιας προσέγγισης στην πράξη
- Η καταγραφή και διερεύνηση των απόψεων και των εμπειριών των συμμετεχόντων σε μία τέτοια προσέγγιση
- Η διερεύνηση του βαθμού ευαισθητοποίησης και υιοθέτησης ανάλογων προσεγγίσεων από μελλοντικούς εκπαιδευτικούς.

Για τις ανάγκες διερεύνησης της επίτευξης σκοπού και των στόχων δημιουργήθηκε ένα μαθησιακό περιβάλλον που στηρίχθηκε: στις αρχές της διαθεματικότητας, στο σχεδιασμό και την παραγωγή δραστηριοτήτων δομημένων σε φύλλα εργασίας, στην οργάνωση της αίθουσας (χώρου) και στον προσδιορισμό του ρόλου του εκπαιδευτή-ερευνητή.

4.2 Μεθοδολογία

4.2.1 Επιλογή της μεθόδου- Το γενικό πλαίσιο

Ο σκοπός και οι στόχοι που θέσαμε για την έρευνα και η διατύπωση των ερευνητικών ερωτημάτων είναι οι παράγοντες που καθόρισαν το δείγμα, την μέθοδο συλλογής των δεδομένων και τον τρόπο ανάλυσης και ερμηνείας του υλικού.

Στον σχεδιασμό που έγινε εκτιμήθηκε ότι το δείγμα της έρευνας εξυπηρετούσαν φοιτητές/τριες του Παιδαγωγικού τμήματος εφόσον πρόκειται για μελλοντικούς εκπαιδευτικούς. Κύρια επιδίωξη του εκπαιδευτικού-ερευνητή ήταν η εφαρμογή της ερευνητικής διαδικασίας να μη διαφοροποιείται από την ανάπτυξη του ημερήσιου προγράμματος των συμμετεχόντων.

Η έρευνα αναπτύχθηκε σε τρία στάδια. Συγκεκριμένα:

Α) *Στάδιο του σχεδιασμού*. Σε αυτό το στάδιο ελήφθησαν αποφάσεις σχετικά με το δείγμα, με τα κριτήρια επιλογής του λογοτεχνικού βιβλίου που επρόκειτο να αξιοποιηθεί κατά το στάδιο της εφαρμογής και έγινε ο ημερολογιακός προγραμματισμός της έρευνας. Σημείο προβληματισμού αποτέλεσε η επιλογή του τύπου της έρευνας, η επιλογή κατάλληλης μεθόδου και των μεθοδολογικών τεχνικών για τη συλλογή των δεδομένων. Κατά τη διάρκεια αυτού του σταδίου πραγματοποιήθηκε ο σχεδιασμός και η παραγωγή του διδακτικού υλικού (φύλλων εργασίας).

Β) *Στάδιο της εφαρμογής*. Το στάδιο αυτό αναπτύχθηκε σε τρεις φάσεις:

- Η πρώτη φάση προέβλεπε εστιασμένη ομαδική συνέντευξη ως διαγνωστικό μέσο αποτύπωσης των απόψεων των φοιτητριών σχετικά με το μαθηματικό γνωστικό υπόβαθρό τους, και γενικότερα της σχέσης -όπως οι ίδιες την αντιλαμβάνονται και την αξιολογούν- με τα μαθηματικά.
- Η δεύτερη φάση αφορούσε την πραγματοποίηση της διδακτικής παρέμβασης. Οι φοιτήτριες συμμετείχαν σε μια σειρά σχεδιασμένων από τον εκπαιδευτικό δραστηριοτήτων, δομημένων σε φύλλα εργασίας.

- Η τρίτη φάση αφορούσε στο ερωτηματολόγιο που σχεδιάστηκε, ώστε να διερευνηθούν οι επιπτώσεις από τη συμμετοχή των φοιτητριών στην ερευνητική διαδικασία.

Γ) *Στάδιο της αξιολόγησης*. Το υλικό που προέκυψε από τη συλλογή των δεδομένων της έρευνας συγκεντρώθηκε, ταξινομήθηκε, αναλύθηκε και αξιολογήθηκε σε σχέση με τον σκοπό, τους στόχους και τα ερευνητικά ερωτήματα τα οποία είχαν τεθεί.

Ως προσφορότερη μέθοδος ανάπτυξης των τριών αυτών σταδίων επιλέχθηκε το «διδακτικό πείραμα». Η συγκεκριμένη μέθοδος επιλέχθηκε για δύο λόγους:

- Βοηθά στην κατανόηση της διαδικασίας μάθησης και διδασκαλίας

- Προσφέρει τα εφόδια για τη γεφύρωση της θεωρίας με την πράξη.

Το διδακτικό πείραμα μας παραπέμπει να δούμε το πείραμα σε άρρηκτη σχέση με τη διδακτική διαδικασία. Εντάσσεται στο ευρύτερο πλαίσιο της ποιοτικής προσέγγισης στην εκπαιδευτική έρευνα ως έκφραση της ανάγκης για συστηματική διερεύνηση και ερμηνεία πειραματισμών στον χώρο της διδακτικής.

Ο όρος διδακτικό πείραμα περιγράφει την ερευνητική τεχνική που σχεδιάζεται έτσι ώστε να βοηθήσει τους εκπαιδευτικούς και ιδιαίτερα τους μαθηματικούς να κατανοήσουν βαθύτερα τις μαθηματικές κατασκευές των μαθητών. Κύριος σκοπός της χρήσης αυτής της τεχνικής είναι η σύνδεση των πρακτικών της έρευνας στην μαθηματική εκπαίδευση με τη διδασκαλία των μαθηματικών. Οι λόγοι που ανέδειξαν τη σημασία και κατέστησαν αναγκαία τη χρήση του διδακτικού πειράματος ως ερευνητική μεθοδολογίας, σύμφωνα με τους Steffe & Thomson (2000, pp.269-270) είναι:

- τα διδακτικά μοντέλα αναπτύχθηκαν έξω από την μαθηματική εκπαίδευση και για λόγους άλλους από την εκπαίδευση των μαθητών[8]. Έτσι έγινε αντιληπτό ότι οι μαθηματικοί δεν μπορούν να δανείζονται μοντέλα από τον χώρο άλλων επιστημών,
- υπάρχει ένα μεγάλο χάσμα μεταξύ των πρακτικών της έρευνας και των πρακτικών της διδασκαλίας, χάσμα το οποίο επιδιώκει να γεφυρώσει το διδακτικό πείραμα

Το διδακτικό πείραμα βασίζεται στην καταγραφή και ανάλυση των διδακτικών επεισοδίων με τέτοιο τρόπο ώστε η ανάλυση των προηγούμενων διδακτικών

---

[8] Για παράδειγμα μπορούμε να αναφέρουμε τα πειράματα του Jean Piaget.

παρεμβάσεων να χρησιμεύει στον σχεδιασμό των νέων διδακτικών επεισοδίων. Κατά τη διάρκεια του διδακτικού πειράματος σημείο εστίασης αποτελεί ο τρόπος του μαθηματικού συλλογισμού του μαθητή. Έτσι με την αξιοποίηση του διδακτικού πειράματος εκπαιδευτικοί και ερευνητές μπορούν να βιώσουν από πρώτο χέρι τον τρόπο μάθησης και κατανόησης των μαθηματικών. Όπως υποστηρίζουν οι Steffe & Thomson (2000, p.267), χωρίς την εμπειρία, την οποία προσφέρει η διδασκαλία, δεν μπορεί να υπάρξει μία βάση για την κατανόηση των ισχυρών μαθηματικών εννοιών και λειτουργιών που οικοδομούν οι μαθητές ή ακόμη δεν μπορεί να υπάρξει καν υποψία ότι αυτές οι έννοιες και οι λειτουργίες μπορεί να είναι πολύ διαφορετικές από αυτές του ερευνητή.

Παρότι το διδακτικό πείραμα αποτελεί παραλλαγή της τεχνικής της κλινικής συνέντευξης διαφέρει από αυτή την κλασσική πιαζετιανή τεχνική με δύο τρόπους (Komorek & Duit, 2004, p.623): πρώτον διαρκεί περισσότερες από μία φορά[9] και δεύτερον εξαιτίας της διδακτικής διάστασης του στο διδακτικό πείραμα οι συνεντεύξεις οργανώνονται σκόπιμα ως μαθησιακές καταστάσεις. Σύμφωνα με τους ερευνητές, μια άλλη διαφορά ανάμεσα στις δύο ερευνητικές τεχνικές αφορά στον ομαδικό χαρακτήρα του διδακτικού πειράματος σε αντίθεση με την εξατομικευμένη κλινική συνέντευξη.

Σύμφωνα με τους Engelhardt, Corpuz, Ozimek, & Rebello (2004, p.158), σε σχέση με την κλινική συνέντευξη το διδακτικό πείραμα προσφέρει τα εξής πλεονεκτήματα:

- επιτρέπει τον έλεγχο των νέων τεχνικών και μεθόδων διδασκαλίας,
- ταυτίζεται με το φυσικό περιβάλλον της τάξης. Αυτό σημαίνει ότι οι μαθητές δεν απομακρύνονται από τον φυσικό τους χώρο με ότι αυτό μπορεί να συνεπάγεται για την εγκυρότητα και την αξιοπιστία των ερευνητικών δεδομένων,
- από τη στιγμή που ο μαθητής μπορεί να δρα ως παρατηρητής, μπορεί να χρησιμεύσει ως πεδίο ενασχόλησης και εξοικείωσης των μαθητών με τις τεχνικές της συνέντευξης.

Το διδακτικό πείραμα αποτελεί μια τεχνική ευέλικτη που επιτρέπει στον ερευνητή να την προσαρμόσει και να την τροποποιήσει ανάλογα με τα ερευνητικά του ενδιαφέροντα και ερωτήματα (Lesh & Kelly, 2000). Για την παρούσα έρευνα

[9] Στην κλινική συνέντευξη συνήθως εμφανίζεται ο όρος συνεδρία, ενώ στο διδακτικό πείραμα ο όρος παρέμβαση

ιδιαίτερη σημασία έχει η περιγραφή του διδακτικού πειράματος από τους Komorek & Duit (2004, pp.623-624). Σύμφωνα με τους ερευνητές, στο διδακτικό πείραμα δραστηριότητες και φαινόμενα που απαιτούν εξήγηση συζητιούνται με τους μαθητές. Ο ερευνητής έχει διττό ρόλο: του συνεντεύκτη αλλά και του δασκάλου. Ως συνεντεύκτης το ενδιαφέρον του εστιάζεται στην ερμηνεία του ατομικού εννοιολογικού πλαισίου των μαθητών. Ως δάσκαλος θα πρέπει να έχει απαντήσεις στις ερωτήσεις, στις απορίες, στις ιδέες των μαθητών και να είναι σε θέση να οργανώνει τις κατάλληλες παρεμβάσεις τη σωστή στιγμή.

Ο ποιοτικός χαρακτήρας του διδακτικού πειράματος, όπως επίσης και η επιλογή των μεθοδολογικών εργαλείων της δικής μας έρευνας ρίχνουν γέφυρες και σε άλλες ποιοτικές μεθόδους. Έτσι η παρούσα έρευνα περιέχει στοιχεία από τη μελέτη περίπτωσης (case study), όπως επίσης και από την έρευνα δράσης(action research).

Η μελέτη περίπτωσης χρησιμοποιείται από τον ερευνητή που «κατά κανόνα παρατηρεί τα χαρακτηριστικά μιας μονάδας- ενός παιδιού, μιας παρέας, μίας σχολικής τάξης, ενός σχολείου ή μίας κοινότητας. Ο σκοπός αυτής της παρατήρησης είναι να εξερευνήσει βαθιά και να αναλύσει συστηματικά τα πολυσχιδή φαινόμενα που συνθέτουν τον κύκλο ζωής της μονάδας. (Cohen & Manion, 1994, p.153). Με μία σε βάθος έρευνα μιας συγκεκριμένης περίπτωσης αποκτούμε γνώσεις για πολλές παρόμοιες περιπτώσεις, χωρίς βέβαια αυτό να σημαίνει ότι ο σκοπός είναι να κάνουμε γενικεύσεις. Αντίθετα, θα λέγαμε πως είναι παρακινδυνευμένο να κάνουμε γενικεύσεις από περιπτώσεις, γιατί αυτές μπορεί να αποδεικνύουν οτιδήποτε και φυσικά δεν παρέχουν εγκυρότητα για αντιπροσωπευτικά δείγματα του πληθυσμού (Καμπίτσης & Χαραχούσου-Καμπίτση, 1999, σ.142). Έτσι παρότι τα συμπεράσματα της περιπτωσιολογικής μελέτης αντιμετωπίζουν κάποιες φορές πρόβλημα γενίκευσης, η μελέτη περίπτωσης συχνά παρέχει πολύτιμο υλικό για την ερμηνεία των ερευνητικών υποθέσεων (Βάμβουκας, 1998, σ. 84). Το κυριότερο ερευνητικό εργαλείο της περιπτωσιολογικής μελέτης είναι η παρατήρηση. Υπάρχουν δύο τύποι παρατήρησης η συμμετοχική και η μη συμμετοχική. Για τις ανάγκες της δικής μας έρευνας επιλέχθηκε η συμμετοχική στην οποία θα αναφερθούμε σε παρακάτω υποενότητα.

Ένα άλλο πλεονέκτημα της μελέτης περίπτωσης είναι ότι αποτελεί ένα «βήμα προς τη δράση» (Cohen & Manion, 1994, σ. 178). Ξεκινάει από έναν κόσμο δράσης και συνεισφέρει σε αυτόν. Η έρευνα δράσης αποτελεί ένα εναλλακτικό, δημοκρατικό και συμμετοχικό τύπο έρευνας, που βασίζεται στη δράση και που στοχεύει στην εύρεση απτών λύσεων για πραγματικά προβλήματα και όχι απλά στην παραγωγή της θεωρητικής γνώσης. Η έρευνα δράσης ερμηνεύει την επιστημονική μέθοδο με πολύ πιο ελεύθερο τρόπο από την εφαρμοσμένη έρευνα, κυρίως επειδή εστιάζεται σε ένα ειδικό πρόβλημα σε ένα ειδικό περιβάλλον. (Cohen & Manion, 1994 σ. 259). Ο εκπαιδευτικός λειτουργώντας ως σύνδεσμος μεταξύ της έρευνας και πράξης μπορεί να συμβάλλει στη μελέτη των προβλημάτων της εκπαίδευσης καθώς και στην ποιοτική βελτίωση της εκπαιδευτικής πράξης. Στην έρευνα δράσης οι συμμετέχοντες διερευνούν οι ίδιοι τις πρακτικές τους με άμεσο στόχο να αναπτύξουν την πρακτική τους κρίση ως άτομα (Carr & Kemmis, 1986). Οι Cohen & Manion (1994) εξειδικεύοντας τις περιπτώσεις στις οποίες η έρευνα δράσης είναι κατάλληλη ως μέθοδος αναφέρουν, ανάμεσα σε άλλα, δύο περιπτώσεις που συνδέονται άμεσα με την παρούσα έρευνα:

α) αντικατάσταση μίας παραδοσιακής μεθόδου από μία μέθοδο ανακάλυψης (σ.270) και

β) βελτίωση των δεξιοτήτων διδασκαλίας, ανάπτυξη νέων μεθόδων μάθησης, ανάπτυξη της αναλυτικής ικανότητας, ανύψωση του επιπέδου της αυτογνωσίας (σ.271).

4.2.2 Οι συμμετέχοντες

Για τις ανάγκες της έρευνας οι συμμετέχοντες στην έρευνα θα έπρεπε να πληρούν ένα και μοναδικό κριτήριο: να είναι φοιτητές/ριες Παιδαδωγικού Τμήματος κατά προτίμηση του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας, εφόσον η έρευνα σχεδιάστηκε να διεξαχθεί σε χώρο του Πανεπιστημίου. Οκτώ φοιτήτριες που παρακολουθούσαν το χειμερινό εξάμηνο το μάθημα «Διασκεδαστικά Μαθηματικά[10]» επέλεξαν να συμμετάσχουν στην ερευνητική διαδικασία. Κύρια επιδίωξη του ερευνητή ήταν να μη διαταραχθεί το ημερήσιο πρόγραμμα των συμμετεχόντων από την εφαρμογή της ερευνητικής διαδικασίας. Γι' αυτόν τον λόγο, σε συνεργασία με τον υπεύθυνο του

---

[10] Μάθημα επιλογής που διδάσκεται στο Π.Τ.Δ.Ε. του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας από τον Κωνσταντίνο Χατζηκυριάκου. Περισσότερες πληροφορίες για τη δομή και το περιεχόμενο του μαθήματος στο Χατζηκυριάκου, Κ. (2007). Η διδακτική αξιοποίηση της μαθηματικής λογοτεχνίας στο μάθημα «Διασκεδαστικά Μαθηματικά-Επίλυση Προβλημάτων. Στο Δ. Χασάπης (επιμ) *Μαθηματικά και Λογοτεχνία. 6° Διήμερο Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών*. Θεσσαλονίκη

μαθήματος, απηλλάγησαν από την όποια υποχρέωση παρακολούθησης των δύο από τις τρεις ώρες του μαθήματος.

Η επιλογή του δείγματος σύμφωνα με την ταξινόμηση που προτείνουν οι Cohen & Manion εντάσσεται στη λογική της βολικής δειγματοληψίας, με την οποία επιλέγονται τα πλησιέστερα άτομα, για να χρησιμεύσουν ως συμμετέχοντες. Στη βολική δειγματοληψία συχνά χρησιμεύουν «αιχμάλωτα» ακροατήρια όπως οι μαθητές ή οι φοιτητές διδασκαλικών σχολών (1994, σ.129).

Όσον αφορά τη συνειδητή συναίνεση για τη συμμετοχή πρέπει να αναφερθεί ότι όλες οι φοιτήτριες επέλεξαν οικειοθελώς τη συμμετοχή τους στην ερευνητική διαδικασία. Από την πρώτη στιγμή ανακοινώθηκε ο σκοπός της έρευνας, ο ημερολογιακός προγραμματισμός των διδακτικών συναντήσεων, ο προαιρετικός χαρακτήρας της παρουσίας τους αλλά και οι υποχρεώσεις που απορρέουν από τη συμμετοχή τους στην έρευνα.

4.2.3 Ερευνητικά εργαλεία

4.2.3.1 Η αρχική συνέντευξη

Όπως ήδη αναφέρθηκε, ως πρώτη -χρονικά- μέθοδος συλλογής των δεδομένων επιλέχθηκε η ομαδική εστιασμένη συνέντευξη. Η επιλογή υπαγορεύθηκε από τις επιδιώξεις της έρευνας, η οποία έθετε ως στόχο τη διερεύνηση των απόψεων των εμπειριών των εκπαιδευτικών και του βαθμού ευαισθητοποίησης που θα προέκυπτε από τη συμμετοχή τους στην ερευνητική διαδικασία. Επομένως η συνέντευξη λειτούργησε ως μέσο καταγραφής των αρχικών αντιλήψεων των φοιτητριών που συμμετείχαν στην έρευνα.

Με δεδομένο ότι οι συνεντεύξεις με ομάδες εστίασης είναι κοινωνικά γεγονότα που περιλαμβάνουν την αλληλεπίδραση των συμμετεχόντων και την αμοιβαία επίδραση και τροποποίηση των ιδεών (Cohen & Manion, 1994), ένας τέτοιος τύπος για τη συλλογή απόψεων θεωρήθηκε ότι υπερτερεί έναντι άλλων μεθόδων και ανταποκρίνεται στις ανάγκες της έρευνας.

Οι Powell, Single & Lloyd (1996) καθορίζουν την ομάδα εστίασης ως μια ομάδα ατόμων που επιλέγονται από τον ερευνητή για να συζητήσουν και να σχολιάσουν από την προσωπική τους εμπειρία το θέμα που αποτελεί το αντικείμενο της έρευνας. Οι ίδιοι αναφέρουν, ότι είναι σημαντικό να διακρίνει κανείς την ομαδική συνέντευξη από τη συνέντευξη με ομάδες εστίασης. Στην απλή ομαδική συνέντευξη η έμφαση δίνεται στις ερωτήσεις και τις απαντήσεις μεταξύ του ερευνητή και των συμμετεχόντων. Οι ομάδες εστίασης στηρίζονται στην αλληλεπίδραση μέσα στην ομάδα, η οποία αναπτύσσεται πάνω στα θέματα που προέρχονται από τον ερευνητή και ως εκ τούτου το βασικό χαρακτηριστικό που διακρίνει τις ομάδες εστίασης είναι η διαλεκτική σχέση και τα στοιχεία που παράγονται από την αλληλεπίδραση μεταξύ των συμμετεχόντων. Οι συμμετέχοντες έχουν μια συγκεκριμένη εμπειρία ή άποψη για το συγκεκριμένο θέμα που ερευνάται, χρησιμοποιείται ένας ρητός οδηγός συνέντευξης και η υποκειμενική εμπειρία των συμμετεχόντων διερευνάται σε σχέση με προκαθορισμένες ερωτήσεις.

Αυτό για την έρευνα μας έχει ιδιαίτερη αξία, καθώς ο προσανατολισμός της έρευνας στρέφεται στους λόγους και τις πρακτικές του πλαισίου από το οποίο διαμορφώνονται οι αντιλήψεις των συμμετεχόντων.

Για τη μαγνητοφώνηση της αρχικής συνέντευξης και των διδακτικών παρεμβάσεων ζητήθηκε η άδεια τους για τη χρήση του μαγνητόφωνου εφόσον υπήρξε ρητή διαβεβαίωση, ότι η χρήση του περιεχομένου θα γινόταν στα πλαίσια της έρευνας και για κανένα άλλο σκοπό.

4.2.3.2 Η συμμετοχική παρατήρηση

Κατά τη διάρκεια των διδακτικών παρεμβάσεων επιλέχθηκε η παρατήρηση ή οποία θα μπορούσε να χαρακτηριστεί μη δομημένη ή ελεύθερη, εφόσον δεν υπήρχε προκαθορισμένο εργαλείο παρατήρησης και συμμετοχική εφόσον «*τα υποκείμενα γνωρίζουν ότι παρατηρούνται από τον ερευνητή-αξιολογητή*» (Παναγιωτακόπουλος, Πιερρακέας, & Πίντελας κ.ά., 2003: σ.101). Χρησιμοποιήθηκε το σχήμα πρόσληψη-κατάταξη- ταξινόμηση- ερμηνεία της γλωσσικής, μη-γλωσσικής και παρα-γλωσσικής συμπεριφοράς των μαθητών/ριών κατά τη διάρκεια ενασχόλησής τους με τις δραστηριότητες των φύλλων εργασίας.

Η συμμετοχική παρατήρηση διακρίνεται για τα παρακάτω πλεονεκτήματα (Καμπίτσης,& Χαραχούσου-Καμπίτση, 1999, σ. 140):

- Είναι ανώτερη από τα πειράματα και τις δημοσκοπήσεις όταν η πληροφορία που συλλέγεται στηρίζεται σε μια συγκεκριμένη συμπεριφορά που δεν μπορεί να καταγραφεί προφορικά
- Με τη συμμετοχική παρατήρηση ο ερευνητής μπορεί να διακρίνει μια στιγμιαία συμπεριφορά στην εξέλιξη της και να κρατήσει σημειώσεις γύρω από μη έκδηλα χαρακτηριστικά
- Αναπτύσσονται σχέσεις του ερευνητή με τους παρατηρούμενους στο φυσικό και όχι σε εργαστηριακό περιβάλλον
- Είναι λιγότερο ευάλωτη στις αντιδράσεις των ατόμων που χρησιμοποιούνται στην έρευνα

Επιπλέον η συμμετοχική παρατήρηση συνδέεται με γεγονότα που πραγματικά συμβαίνουν στη ζωή και που θα ήταν αντιδεοντολογικό ή αδύνατο να τα δημιουργήσουμε (Macrae, 1999, σ.32)

Παρόλα αυτά η μέθοδος της συμμετοχικής παρατήρησης δεν έχει μείνει χωρίς κριτική, η οποία εστιάζει στην εσωτερική και εξωτερική εγκυρότητα της έρευνας.

Για την καταγραφή των διαλόγων και των αλληλεπιδράσεων χρησιμοποιήθηκε μαγνητόφωνο, για το οποίο ζητήθηκε και δόθηκε η άδεια από τα μέλη της ομάδας για τη χρησιμοποίησή του. Όπως ήταν αναμενόμενο, στην αρχή το μαγνητόφωνο προκάλεσε «μούδιασμα». Ωστόσο, πριν από το τέλος όμως της πρώτης διδακτικής παρέμβασης ξεχάστηκε και κατέληξε μέρος της «επίπλωσης» του χώρου, χωρίς να δίνει κανένας/καμία σημασία σε αυτό.

4.2.3.3 Το τελικό ερωτηματολόγιο

Το ερωτηματολόγιο (Παράρτημα 3) αποτέλεσε την τρίτη και τελευταία φάση του σταδίου της εφαρμογής. Τα δεδομένα από την επεξεργασία των απαντήσεων σε συνδυασμό με τα δεδομένα που προέκυψαν από τα προηγούμενα εργαλεία συλλογής δεδομένων χρησιμοποιήθηκαν στο στάδιο της αξιολόγησης της ερευνητικής διαδικασίας που αποτελούσε και το τελευταίο στάδιο της έρευνας.

Κατά τον σχεδιασμό του ερωτηματολογίου λάβαμε υπόψη μας ότι θα πρέπει να είναι σαφές, απαλλαγμένο από αοριστίες και δεκτικό ομοιόμορφου χειρισμού. Ο σχεδιασμός του θα πρέπει να ελαχιστοποιεί τα πιθανά σφάλματα εκ μέρους των απαντώντων και αυτών που κάνουν την κωδικοποίηση. Επιπλέον το ερωτηματολόγιο θα πρέπει να κεντρίζει το ενδιαφέρον, και να εκμαιεύει απαντήσεις όσο το δυνατόν πλησιέστερες στην πραγματικότητα (Davidson, αναφορά στο Cohen & Manion, 1994, σ.134).

Για να γίνονται οι ερωτήσεις κατανοητές έτσι ώστε να ελαχιστοποιηθεί η πιθανότητα σφάλματος μπορούν να αναφερθούν οκτώ σημεία που χρειάζονται προσοχή (Καμπίτσης & Χαραχούσου-Καμπίτση, 1999, σ.118):

- οι ερωτήσεις πρέπει να περιέχουν λέξεις που είναι γνωστές στον δειγματοληπτικό πληθυσμό,
- οι ερωτήσεις δεν πρέπει να είναι διφορούμενες ή ασαφείς,
- οι ερωτήσεις πρέπει να ζητούν ένα πράγμα την κάθε φορά και όχι δύο ερωτήσεις τυλιγμένες σε μία,
- οι ερωτήσεις δεν πρέπει να τοποθετούνται σε αρνητικό τύπο,
- οι αφηρημένες έννοιες πρέπει να αποφεύγονται,
- οι ερωτήσεις δεν πρέπει να είναι ευρείες σε έννοια, δε θα πρέπει δηλαδή να επιδέχονται πολλαπλές ερμηνείες και επομένως απαντήσεις,
- οι ερωτήσεις που χρειάζονται χρόνο για να αφομοιωθούν ίσως δε δώσουν ακριβείς απαντήσεις και
- οι ερωτήσεις που ζητούν ποσοτικές και λεπτομερείς πληροφορίες το μόνο που κάνουν είναι να μπερδεύουν τους απαντώντες.

Λαμβάνοντας υπόψη την προβληματική και τους περιορισμούς που αναφέρθηκαν κατασκευάστηκε ένα ερωτηματολόγιο, το οποίο χωρίστηκε σε δύο μέρη. Στο πρώτο μέρος ζητούνταν πληροφορίες για ατομικά στοιχεία συμπεριλαμβανομένου και του ονοματεπώνυμου, το οποίο ήταν απαραίτητο στοιχείο της ερευνητικής διαδικασίας εφόσον ένας από τους στόχους που τέθηκαν ήταν η διερεύνηση των απόψεων, των εμπειριών και του βαθμού ευαισθητοποίησης και υιοθέτησης ανάλογων προσεγγίσεων από τη μεριά των συμμετεχόντων. Επομένως η χρήση του ονοματεπώνυμου θα επέτρεπε τη σύγκριση των δεδομένων μεταξύ της αρχικής συνέντευξης και του τελικού ερωτηματολογίου. Για δεοντολογικούς λόγους ανακοινώθηκε ρητά, ότι το ονοματεπώνυμο θα χρησιμοποιηθεί αυστηρά από τον εκπαιδευτικό- ερευνητή μόνο κατά την επεξεργασία των δεδομένων και σε καμιά περίπτωση δε θα κοινοποιηθεί ούτε θα χρησιμοποιηθεί για άλλο σκοπό.

Το δεύτερο μέρος περιείχε δώδεκα ερωτήσεις ανοιχτού και κλειστού τύπου. Ανάλογα με το ερευνητικό ενδιαφέρον κάθε ερώτησης, οι ερωτήσεις κλειστού τύπου μπορεί να ήταν διαζευκτικές, πολλαπλής επιλογής ή ιεράρχησης. (Βάμβουκας, 1998, σ. 251).

Στο κεφάλαιο της διδακτικής διαδικασίας της έρευνας συζητούνται τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την επεξεργασία των απαντήσεων σε συνδυασμό με τα δεδομένα της αρχικής συνέντευξης, της παρατήρησης και των απαντήσεων των φύλλων εργασίας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΕΜΠΤΟ

Ο σχεδιασμός της διδακτικής διαδικασίας

Στο κεφάλαιο αυτό συζητούνται θέματα και ζητήματα που αντιμετωπίστηκαν κατά τη φάση του σχεδιασμού της διδακτικής διαδικασίας. Υποστηρίζεται η διαθεματική οργάνωση του περιεχομένου που λήφθηκε υπόψη κατά τον σχεδιασμό των διδακτικών παρεμβάσεων. Παρουσιάζεται το χρονοδιάγραμμα της σειράς των διδακτικών παρεμβάσεων και δίνονται στοιχεία για τον σχεδιασμό και την παραγωγή των φύλλων εργασίας που αποτελούσαν το βασικό διδακτικό υλικό που χρησιμοποιήθηκε στο στάδιο της εφαρμογής.

5.1 Περιορισμοί και αποφάσεις

Λόγω της φύσης της διδακτικής παρέμβασης, η οποία στηρίχθηκε σε ένα λογοτεχνικό βιβλίο, ο σχεδιασμός της διδακτικής παρέμβασης αντιμετώπισε τους εξής περιορισμούς:

- Το περιεχόμενο του βιβλίου έπρεπε να χωριστεί σε τόσες ενότητες, όσες και οι διδακτικές παρεμβάσεις
- Το περιεχόμενο επέβαλλε την επιλογή των δραστηριοτήτων, εφόσον αυτό αποτελούσε το πεδίο αναφοράς τους
- Η επιλογή της θεματολογίας έπρεπε να οδηγεί στον σχεδιασμό δραστηριοτήτων που θα μπορούσαν να ολοκληρωθούν εντός των χρονικών ορίων της διδακτικής παρέμβασης
- Ο σχεδιασμός θα έπρεπε να λαμβάνει υπόψη τη διαθεματική εκπαιδευτική προσέγγιση.

Η διαθεματική προσέγγιση είναι η μορφή διδασκαλίας κατά την οποία από τη μια το περιεχόμενο διδασκαλίας ενιαιοποιείται και από την άλλη η διδασκαλία είναι εργαστηριακής και ευρηματικής μορφής. Πρόκειται δηλαδή για μια εκπαιδευτική καινοτομία τόσο ως προς το περιεχόμενο της διδασκαλίας όσο και ως προς τη μέθοδο εργασίας (Θεοφιλίδης, 1997). Η παραδοσιακή πρακτική σύνταξης Α.Π.Σ. επέλεγε ως περιεχόμενο της σχολικής γνώσης συνήθως ό,τι κατά καιρούς κωδικοποιούσαν οι επιστήμες ως σημαντική γνώση και το συστηματοποιούσαν σε μορφή κατάλληλη για τους μαθητές. Η οργάνωση της γνώσης γινόταν σε ανεξάρτητα μαθήματα κατά. αντιστοιχία με τους επιστημονικούς κλάδους (όπως αυτοί εκφράζονταν στη γνώση που παρεχόταν στα πανεπιστήμια). Όσον αφορά τις διδακτικές μεθόδους, υιοθετούνταν συνήθως άμεσες μέθοδοι διδασκαλίας που κατευθύνονταν κυρίως στη «μετάδοση γνώσης».

Η πολυδιάσπαση των διδακτικών περιεχομένων σε πολλούς επιμέρους επιστημονικούς τομείς που παρατηρείται στο σχολείο, κατακερματίζει την ανθρώπινη σκέψη και την καθιστά αφηρημένη, αποσπασματική ξεκομμένη από το πλαίσιο που τη γέννησε, άσχετη με τις εμπειρίες των μαθητών. Σαν αποτέλεσμα οι μαθητές μην έχοντας την ευκαιρία να συλλάβουν τα κοινά σημεία των επιστημών, τις προεκτάσεις και τις συνέπειές τους στους άλλους επιστημονικούς κλάδους, παραμένουν αδιάφοροι για τη γνώση αυτής της μορφής αλλά και ανίκανοι να την αξιοποιήσουν για νέες μορφές σκέψης και δράσης (Ματσαγγούρας, 2002). Αντίθετα στη διαθεματική προσέγγιση, ο σχεδιασμός ξεκινά από ένα κεντρικό θέμα και προχωρά με τον προσδιορισμό των ιδεών (ή των εννοιών) που σχετίζονται με το θέμα, καθώς και δραστηριοτήτων οι οποίες θα μπορούσαν να αξιοποιηθούν για να διερευνήσουν αυτές τις ιδέες. Ο σχεδιασμός πραγματοποιείται χωρίς να παίρνει υπόψη τις διαχωριστικές γραμμές των μαθημάτων, αφού κύριος σκοπός είναι η διερεύνηση του θέματος (Beane, 1997).

Οι παραπάνω περιορισμοί οδήγησαν στη λήψη αποφάσεων σχετικά με τον σχεδιασμό της ερευνητικής προσέγγισης. Έτσι ακολουθώντας τη δομή και τη διάρθρωση των κεφαλαίων του βιβλίου, χωρίστηκε το βιβλίο σε έξι υποενότητες. Για κάθε μία από αυτές τις υποενότητες σχεδιάστηκαν δύο φύλλα εργασίας: τα φύλλα πολιτισμικής πλαισίωσης και τα φύλλα μαθηματικού περιεχομένου[11] (Παράρτημα 1 και 2). Για τον

[11] Για πρακτικούς κυρίως λόγους τα φύλλα πολιτισμικής πλαισίωσης φέρουν το επίθεμα (α) ενώ τα φύλλα μαθηματικού περιεχομένου το επίθεμα (β)

λόγο αυτό ο σχεδιασμός περιλάμβανε την χρονική κατάτμηση του διδακτικού διώρου (90 λεπτά) ως εξής: το ένα τρίτο του χρόνου (30 λεπτά) αφορούσε την πραγμάτευση των θεμάτων των φύλλων πολιτισμικής πλαισίωσης, ενώ για το υπόλοιπο διαθέσιμο χρονικό διάστημα (60 λεπτά) το ενδιαφέρον στρεφόταν κυρίως σε δραστηριότητες μαθηματικού περιεχομένου.

5.2 Το χρονοδιάγραμμα της ερευνητικής εφαρμογής

Έχοντας υπόψη μας τους περιορισμούς που αναφέρθηκαν στην προηγούμενη ενότητα και δεδομένων των χρονικών περιθωρίων που υπήρχαν λόγω λήξης του εξαμήνου και έναρξης της εξεταστικής περιόδου, αποφασίστηκε η έναρξη της ερευνητικής εφαρμογής αμέσως μετά το στάδιο του σχεδιασμού χωρίς τη μεσολάβηση κενών χρονικών διαστημάτων.

Έτσι σε συνεργασία με τις συμμετέχουσες προγραμματίστηκαν επτά συναντήσεις για συγκεκριμένη μέρα και ώρα. Από αυτές τις συναντήσεις, η πρώτη είχε τον χαρακτήρα γνωριμίας και κατά τη διάρκεια της πραγματοποιήθηκε η αρχική συνέντευξη. Οι επόμενες συναντήσεις, διάρκειας δύο διδακτικών ωρών η κάθε μία, αφορούσαν το στάδιο εφαρμογής της διδακτικής διαδικασίας. Προβλέφθηκε επίσης για την τελευταία συνάντηση η συμπλήρωση του ερωτηματολογίου, για το οποίο υπολογίσαμε ότι ο χρόνος συμπλήρωσης του δε θα ξεπερνούσε τα τριάντα λεπτά..

5.3 Τα φύλλα εργασίας

Για τις ανάγκες της έρευνας επιλέχθηκε ο σχεδιασμός και η αξιοποίηση δύο διαφορετικών για κάθε διδακτική παρέμβαση φύλλων εργασίας: πολιτισμικής πλαισίωσης και μαθηματικού περιεχομένου.

5.3.1 Φύλλα πολιτισμικής πλαισίωσης

Τα φύλλα πολιτισμικής πλαισίωσης αφορούσαν σε εργασία στο σπίτι και στηριζόταν στην αξιοποίηση δευτερογενών πηγών όπως διαδίκτυο, εγκυκλοπαίδειες ή βιβλία. Αυτά τα φύλλα εργασίας δίνονταν για προετοιμασία και συμπλήρωση μία εβδομάδα πριν από την διδακτική παρέμβαση με το αντίστοιχο φύλλο μαθηματικού περιεχομένου. Από την ενασχόληση και τη διαπραγμάτευση των φύλλων πολιτισμικής πλαισίωσης προέκυπτε ως φυσική εξέλιξη και αναγκαιότητα η αξιοποίηση των φύλλων μαθηματικού περιεχομένου. Η κατανόηση του κειμένου, η έρευνα και η αξιοποίηση των πηγών και η ανάπτυξη κριτικής σκέψης και διάθεσης αποτελούσε το τρίπτυχο των στόχων με βάση το οποίο σχεδιάστηκαν αυτά τα φύλλα εργασίας.. Στον παρακάτω Πίνακα 1 αναφέρονται για κάθε ένα από αυτά τα φύλλα εργασίας επιγραμματικά οι δραστηριότητες και οι στόχοι στους οποίους αυτές οι δραστηριότητες αντανακλούν.

Πίνακας 1: Δραστηριότητες και στόχοι των φύλλων εργασίας πολιτισμικής πλαισίωσης

Φύλλο εργασίας	Δραστηριότητες	Στόχοι
1α	- Περίληψη - Descartes, Pascal, Newton, Leibniz, Euler, Lagrange, Comte - Συνεισφορά Αράβων στα μαθηματικά	- Κατανόηση κειμένου - Χρήση πηγών - Χρήση πηγών, ανάπτυξη κριτικής σκέψης
2α	- Περίληψη - Πλάτωνας- Γαλιλαίος - Υπατία - Γυναίκα και μαθηματικά	- Κατανόηση κειμένου - Χρήση πηγών, ανάπτυξη κριτικής σκέψης - Χρήση πηγών - Ανάπτυξη κριτικής σκέψης
3α	- Περίληψη - Πυθαγόρας-Πυθαγόρειοι - Ευκλείδης - Κλάδοι μαθηματικών	- Κατανόηση κειμένου - Χρήση πηγών - Χρήση πηγών, ανάπτυξη κριτικής σκέψης - Χρήση πηγών, ανάπτυξη κριτικής σκέψης

4α	- Περίληψη - Al Khwarizmi - Ινδοί μαθηματικοί, ινδοαραβικό σύστημα αρίθμησης -Fibonacci, πρόβλημα κουνελιών, αριθμός φ	- Κατανόηση κειμένου - Χρήση πηγών, ανάπτυξη κριτικής σκέψης - Χρήση πηγών, ανάπτυξη κριτικής σκέψης - Χρήση πηγών, ανάπτυξη κριτικής σκέψης
5α	- Περίληψη - Συστήματα αρίθμησης - Ζήνωνας, παράδοξα - Διόφαντος - Αρχιμήδης	- Κατανόηση κειμένου - Χρήση πηγών, ανάπτυξη κριτικής σκέψης - Χρήση πηγών, ανάπτυξη κριτικής σκέψης - Χρήση πηγών - Χρήση πηγών,
6α	- Περίληψη - Ερατοσθένης - Εικασίες, τελευταίο θεώρημα του Φερμά - Ομάρ Καγιάμ	- Κατανόηση κειμένου - Χρήση πηγών - Χρήση πηγών, ανάπτυξη κριτικής σκέψης - Χρήση πηγών

5.3.2 Φύλλα μαθηματικού περιεχομένου

Αυτά τα φύλλα εργασίας σχεδιάστηκαν με βάση το μαθηματικό περιεχόμενο της εκάστοτε υπό εξέταση ενότητας του βιβλίου. Αναπόφευκτα η πληθώρα μαθηματικών αναφορών οδηγούσε κάποιες φορές σε αποφάσεις και επιλογές σε σχέση με το ποιες από αυτές έπρεπε να χρησιμοποιηθούν και ποιες να παραλειφθούν. Τα κριτήρια επιλογής του μαθηματικού περιεχομένου αποτέλεσαν σημείο προβληματισμού καθώς έπρεπε να ληφθούν υπόψη τα εξής :

- Το μαθηματικό περιεχόμενο θα έπρεπε να ανταποκρίνεται στον σκοπό της έρευνας, δηλαδή σε μια προσέγγιση ενσωμάτωσης της ιστορίας των μαθηματικών με τα μαθηματικά
- Οι δραστηριότητες και το διδακτικό υλικό προοριζόταν για φοιτήτριες και όχι για παιδιά. Αυτό σημαίνει ότι θα έπρεπε να σχεδιαστούν δραστηριότητες που να ανταποκρίνονται στην ηλικία και στο γνωστικό υπόβαθρο των μελών της ομάδας.
- Ακολουθώντας το πνεύμα του βιβλίου, οι δραστηριότητες θα έπρεπε να είναι ευχάριστες και παιγνιώδεις, ανταποκρινόμενες στην ανθρώπινη διάσταση των μαθηματικών.
- Οι δραστηριότητες κάθε φύλλου εργασίας θα έπρεπε να είναι τόσες και τέτοιες, ώστε να είναι δυνατή η μεθοδική και εξαντλητική μελέτη και εκτέλεση τους.

Έγινε προσπάθεια ώστε τα έξι φύλλα μαθηματικού περιεχομένου που δημιουργήθηκαν για τον σκοπό αυτό να ανταποκρίνονται στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης, η οποία άλλωστε αποτελεί σκοπό της διδασκαλίας των μαθηματικών. Εντάσσεται στους γενικότερους σκοπούς της εκπαίδευσης και αφορά στη συμβολή για ολοκλήρωση της προσωπικότητας του μαθητή και την επιτυχή κοινωνική του ένταξη εφόσον τα μαθηματικά ασκούν τον μαθητή στη μεθοδική σκέψη, στην ανάλυση, στην αφαίρεση, στη γενίκευση, στην εφαρμογή, στην κριτική σκέψη και σε λογικές διεργασίες που βοηθούν στη διατύπωση της σκέψης με σαφήνεια, λιτότητα και ακρίβεια (Τύπας, 2005, σ.54).

Δόθηκε έμφαση στην ανάπτυξη δεξιοτήτων και ικανοτήτων: παρατήρησης, αυτοσυγκέντρωσης, ανάληψης πρωτοβουλιών, δημιουργικής φαντασίας, επιμονής, κριτικής σκέψης.

Σε σχέση με τους άξονες περιεχομένου των μαθηματικών στο Δημοτικό έγινε προσπάθεια προσαρμογής των δραστηριοτήτων σε όσο το δυνατόν περισσότερους από αυτούς. Έτσι με τα φύλλα μαθηματικού περιεχομένου καλύφθηκαν σε μεγαλύτερο ή μικρότερο βαθμό όλοι οι άξονες περιεχομένου. Στον Πίνακα 2 εμφανίζονται οι άξονες περιεχομένου γύρω από τους οποίους δομήθηκαν, σχεδιάστηκαν και αναπτύχθηκαν τα φύλλα εργασίας μαθηματικού περιεχομένου.

Πίνακας 2: Άξονες περιεχομένου στα φύλλα εργασίας μαθηματικού περιεχομένου

Άξονες περιεχομένου	Φύλλο 1β	Φύλλο 2β	Φύλλο 3β	Φύλλο 4β	Φύλλο 5β	Φύλλο 6β
Επίλυση προβλήματος	√	√	√	√	√	√
Αριθμοί και πράξεις	√	√	√	√	√	√
Μετρήσεις			√			
Γεωμετρία				√		√
Συλλογή και επεξεργασία δεδομένων		√				
Λόγοι και αναλογίες	√					√
Εξισώσεις		√	√	√	√	

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΚΤΟ

Η διδακτική διαδικασία

Στο κεφάλαιο αυτό περιγράφεται και συζητείται το στάδιο της εφαρμογής της έρευνας, το οποίο αναπτύχθηκε σε τρεις φάσεις. Αρχικά περιγράφεται η ομαδική συνέντευξη που πραγματοποιήθηκε κατά τη διάρκεια της εναρκτήριας συνάντησης. Στη συνέχεια αναλύονται και αξιολογούνται δεδομένα και αποτελέσματα τα οποία προέκυψαν κατά τη διάρκεια των διδακτικών παρεμβάσεων. Τέλος, το υλικό που προέκυψε από τη συλλογή των δεδομένων του τελικού ερωτηματολογίου αναλύεται και αξιολογείται σε σχέση με τα ερευνητικά ερωτήματα που έχουν τεθεί.

6.1 Οι διδακτικές παρεμβάσεις

Έχοντας υπόψη τους περιορισμούς, μεθοδολογικούς και πρακτικούς, που αντιμετωπίζαμε, αποφασίστηκε οι διδακτικές παρεμβάσεις να γίνουν σε επτά εβδομαδιαίες συναντήσεις σε συγκεκριμένη ημέρα και ώρα αλλά και χώρο. Από τις επτά συναντήσεις η πρώτη είχε τον χαρακτήρα της εναρκτήριας συνάντησης και οι υπόλοιπες έξι αποτέλεσαν το χωρικό και χρονικό πλαίσιο των διδακτικών παρεμβάσεων.

6.1.1 Η εναρκτήρια συνάντηση

Έχοντας υπόψη μας τον εθελοντικό χαρακτήρα της συμμετοχής στην ερευνητική διαδικασία, αλλά και το γεγονός ότι το δείγμα της έρευνας αποτελούνταν από ενήλικες φοιτήτριες, λήφθηκαν υπόψη δεδομένα που προέρχονται από τον χώρο της εκπαίδευσης ενηλίκων. Σύμφωνα με τους Noye & Piveteau (2002) η αρχή μιας συνάντησης μπορεί να αποτελεί στιγμή ανησυχίας. Αυτό που μπορεί να ανησυχήσει τα μέλη μίας ομάδας και επομένως να δημιουργήσει προβλήματα όπως για παράδειγμα έλλειψη επικοινωνίας, έλλειψη επιθυμίας συμμετοχής, μερική αδράνεια, φαινόμενα αναδίπλωσης, λεκτική επιθετικότητα, αλλοίωση δεδομένων, περιγράφεται από τις παρακάτω ερωτήσεις:

- Ποιος είναι αυτός; Ποιος είναι ο εκπαιδευτικός και τι είδους σχέση θα εγκαθιδρύσει ανάμεσά μας;
- Ποιοι είναι τα υπόλοιπα μέλη; Πρέπει να εκτεθούμε στην κρίση τους; Ποια θα είναι η στάση τους και ποιο το επίπεδο των ικανοτήτων τους;
- Γιατί βρισκόμαστε εδώ;
- Ποια είναι η χρονική διάρκεια της εκπαίδευσης;
- Τι θα κάνουμε;

Γνωρίζοντας τους προβληματισμούς και τις πιθανές ανησυχίες των φοιτητριών η προσπάθεια εστιάστηκε στην απάντηση όλων αυτών των ερωτημάτων και στη δημιουργία ενός κλίματος φιλικού, συμμετοχικού και εμπιστοσύνης. Παρουσιάστηκαν ο σκοπός και οι στόχοι της έρευνας, τα δικαιώματα και οι υποχρεώσεις των μελών της ομάδας και συζητήθηκαν δεοντολογικά ζητήματα όπως για παράδειγμα η χρήση μαγνητοφώνου από τον εκπαιδευτικό-ερευνητή.

Σύμφωνα με τον σχεδιασμό της έρευνας, κατά τη διάρκεια της πρώτης αυτής συνάντησης πραγματοποιήθηκε η αρχική συνέντευξη. Από τη συνέντευξη προέκυψαν τα εξής:

- Οι οκτώ φοιτήτριες βρίσκονταν σε διαφορετικό εξάμηνο σπουδών. Δύο φοιτήτριες βρισκόταν στο έβδομο εξάμηνο, πέντε στο πέμπτο και μία στο τρίτο εξάμηνο.
- Κατά την εισαγωγή τους στο Παιδαγωγικό Τμήμα πέντε φοιτήτριες προέρχονταν από τη θετική ή την τεχνολογική κατεύθυνση και τρεις από τη θεωρητική κατεύθυνση, γεγονός που αποδείχθηκε σημαντικό ως προς τη συνέπεια στις υποχρεώσεις τους.
- Η σχέση τους με τα μαθηματικά ποίκιλε ανάλογα με την κατεύθυνση των λυκειακών τους σπουδών.
- Όλες οι φοιτήτριες ανέφεραν δυσκολίες, έλλειψη αυτοπεποίθησης και άγχος στον τρόπο με τον οποίο αντιμετώπιζαν τα μαθηματικά.

- Θεωρούσαν τον τρόπο προσέγγισης των μαθηματικών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης διαφορετικό από αυτό των σπουδών τους και το αντίστροφο χωρίς να είναι να θέση να αποφασίσουν ποια από τους δύο τρόπους είναι πιο κοντά σε σύγχρονες παιδαγωγικές θεωρίες και διδακτικές προσεγγίσεις.

Μετά τη συνέντευξη δόθηκε το πρώτο φύλλο πολιτισμικής πλαισίωσης (1α) για να ετοιμαστεί από τις φοιτήτριες και να παρουσιαστεί στην επόμενη συνάντηση[12].

6.1.2 Η 1η διδακτική παρέμβαση

Κατά την διάρκεια της πρώτης διδακτικής παρέμβασης συζητήθηκαν οι απαντήσεις στις ερωτήσεις του φύλλου εργασίας 1α. Εκτός από την περιληπτική απόδοση των κεφαλαίων, η οποία όπως φαίνεται στον Πίνακα 1 (σελ.58) αποτελούσε κοινό γνώρισμα όλων των φύλλων εργασίας πολιτισμικής πλαισίωσης, οι φοιτήτριες κλήθηκαν να απαντήσουν και να αναλύσουν ερωτήματα τα οποία προέκυπταν από συγκεκριμένες αναφορές του βιβλίου της διδακτικής παρέμβασης. Τα δύο ερωτήματα που τέθηκαν ήταν:

- *Descartes, Pascal, Newton, Leibniz, Euler, Lagrange, Comte είναι οι επτά μεγάλοι γεωμέτρες στους οποίους ο συγγραφέας αφιερώνει το βιβλίο. Γράψε για καθέναν απ' αυτούς λίγα λόγια (περίπου 100 λέξεις) για τη ζωή και το έργο του.*

- *«Τον άφηνα στη γαλήνη του, να εξιχνιάζει με το εξαιρετικό μυαλό του τα κρυμμένα μυστήρια των Μαθηματικών - της επιστήμης που τόσο βελτίωσε και ανάπτυξε η αραβική φυλή». Μ' αυτή τη φράση τελειώνει το δεύτερο κεφάλαιο του βιβλίου. Ποια είναι η συνεισφορά των Αράβων στα Μαθηματικά; Τι καινούριο εισήγαγαν στην έως τότε υπάρχουσα μαθηματική γνώση;(Περίπου 100 λέξεις)*

Παρότι οι απαντήσεις προέκυψαν από την αναζήτηση πηγών στο διαδίκτυο, σε εγκυκλοπαίδειες ή άλλα βιβλία και από την επεξεργασία των πληροφοριών αυτών, διαπιστώθηκε ότι αυτό που εξυπηρετούσε περισσότερο τις φοιτήτριες ήταν η αναζήτηση στοιχείων με τη βοήθεια κάποιας διαδικτυακής μηχανής αναζήτησης. Την πιο συνηθισμένη πρακτική αποτέλεσε ή μέθοδος «αντιγραφή-επικόλληση» κάποιου άρθρου ή τμήματος του και βιογραφικών στοιχείων από 'ειδικούς' διαδικτυακούς τόπους. Όπως φαίνεται και στις Εικόνες 1 και 2 η προσοχή στην επεξεργασία των

[12] Τα συμπληρωμένα φύλλα πολιτισμικής πλαισίωσης στέλνονταν πριν από κάθε προγραμματισμένη συνάντηση και ηλεκτρονικά στον εκπαιδευτικό-ερευνητή ώστε να μπορεί κάθε φορά να οργανώνει και να κατευθύνει τη συζήτηση των υπό διαπραγμάτευση θεμάτων.

στοιχείων της αναζήτησης στρεφόταν περισσότερο στον τρόπο συρραφής των στοιχείων παρά στην επιλογή του περιεχομένου

Εικόνα 1: Απάντηση στο φύλλο εργασίας 1α

3. *«Τον άφηνα στη γαλήνη του, να εξιχνιάζει με το εξαιρετικό μυαλό του τα κρυμμένα μυστήρια των Μαθηματικών - της επιστήμης που τόσο βελτίωσε και ανάπτυξε η αραβική φυλή».* Μ' αυτή τη φράση τελειώνει το δεύτερο κεφάλαιο του βιβλίου. Ποια είναι η συνεισφορά των Αράβων στα Μαθηματικά; Τι καινούριο εισήγαγαν στην έως τότε υπάρχουσα μαθηματική γνώση;(Περίπου 100 λέξεις)

Οι Άραβες,μέσα από την επαφή τους με άλλους πολιτισμούς,συνέθεσαν και ανέπτυξαν την μαθηματική επιστήμη.

Επινόησαν την Άλγεβρα,ασχολήθηκαν με την Γεωμετρία και τελειοποίησαν το σύστημα αρίθμησης των Ινδών,που τελικά ονομάστηκε αραβικό(μιας και οι κάτοικοι της Ινδίας,μιλούσαν αραβικά).Ακόμα είχαν ανακαλύψει μεθόδους για την απλοποίηση των εξισώσεων.

Μεγάλοι Άραβες μαθηματικοί ήταν ο Αλ Χβαρίσμι(780-850μ.χ) που θεωρείται πατέρας της Άλγεβρας,υπολόγισε το εμβαδό και την περιφέρεια του κύκλου(π=22/7)και ο Αμπού Αλ Μάφα που ασχολήθηκε με την τριγωνομετρία και τον σχολιασμό του Ευκλείδη και του Διοφάντη.Σημαντικοί αστρονόμοι ήταν ο Ομάρ Χαγιάμ(1048-1131μ.χ) και ο Al Zargali, που διέπρεψε κατά τα τέλη του 11ου αιώνα.

Όλη αυτή η πρόοδος διακόπηκε με την κατάκτηση του αραβικού κόσμου απ' τους Μογγόλους και έπειτα από την τουρκική κατάκτηση.

ΠΗΓΕΣ: 1.Εγκυκλοπαίδεια Magenta

2.http://www.enp.gr/yo-y-y-/syntome-istoria-ton-mathematikon-ss.html

3. http://www.live-pedia.gr/intex.php

Εικόνα 2 :Απάντηση στο φύλλο εργασίας 1α

Leonhard Euler

Ελαιογραφία του Emanuel Handmann, 1756.

Leonhard Euler (1707 - 1783)
Γεννήθηκε στη Βασιλεία της Ελβετίας, γιος ενός καλβινιστή πάστορα και σπούδασε Μαθηματικά με τον Johann Bernoulli. Σε νεαρή ηλικία εκλήθη στην Ακαδημία της Πετρούπολης, όπου έγινε το 1733 καθηγητής. Με την πραγματεία του "Mechanica" απελευθέρωσε την Μηχανική από τα δεσμά της συνθετικής παρουσίασης, την έκανε αναλυτική. Από το 1741 μέχρι το 1756 διετέλεσε διευθυντής της τάξης Μαθηματικών της Ακαδημίας Επιστημών στο Βερολίνο. Το 1748 και το 1755 δημοσίευσε τις γνωστότερες εργασίες του για το Λογισμό ("Introductio in analysin infinitorum", "Institutiones calculi differentialis"), δίνοντας μια ενιαία πραγμάτευση του θέματος. Το 1766 επανήλθε στην Πετρούπολη. Το 1767 έμεινε τελείως τυφλός, αλλά η παραγωγικότητα του αυξήθηκε. Δίκαια θεωρείται ως ο πιο παραγωγικός ερευνητής στην ιστορία των Μαθηματικών.

Πηγές: http://sfrang.com/selides/mm1/frame1.htm
http://www.mathsforyou.gr/images/KMN/euler.htm
http://users.sch.gr/kassetas/ed0math3.htm

Στην Εικόνα 3 η συρραφή πληροφοριών χωρίς διάθεση για περαιτέρω επεξεργασία και ανάλυση, είναι προφανής. Τα κείμενα των πηγών ενσωματώνονται στην απάντηση με την αρχική τους μορφοποίηση. Διακρίνονται πολύ εύκολα διαφορές στη γραμματοσειρά, στο διάστιχο και στη στοίχιση του κειμένου.

Εικόνα 3: Απάντηση στο φύλλο εργασίας 1α

Auguste Comte

Βραζιλιάνικο γραμματόσημο έκδοσης 1957 για τα εκατό χρόνια από το θάνατο του Comte

Ο Auguste Comte γεννήθηκε το 1798 στο Montpellier και πέθανε το 1857 στο Παρίσι. Θεωρείται μια από τις μεγαλύτερες πνευματικές φυσιογνωμίες του 19ου αιώνα. Το έργο του είναι συστηματικό και έχει κατά καιρούς ανασυγκροτηθεί είτε ως θεμελίωση της κοινωνιολογίας είτε ως φιλοσοφία της ιστορίας. Εκείνο όμως το οποίο εξαρχής θα πρέπει να τονιστεί είναι το γεγονός ότι η σκέψη του διαμορφώνεται σε μια φάση ιστορικής εξέλιξης του δυτικού κόσμου που είναι η γενέθλια περίοδος όλων των ιδεών που σφράγισαν τη νεωτερικότητα, δηλ. τους 19ο και 20ό αιώνες.

Ο Comte υπήρξε μια εκρηκτική και αντιφατική προσωπικότητα ως άτομο, ενώ ταυτόχρονα προσπάθησε να χαλιναγωγήσει τον ενθουσιασμό του με την επιστημονική μέθοδο. Θεωρείται ο πατέρας του θετικισμού και ο θεμελιωτής της κοινωνιολογίας ως επιστήμης

http://tovima.dolnet.gr/print_article.php?e=B&f=12467&m=B04&aa=1

Στο δεύτερο μέρος της πρώτης διδακτικής παρέμβασης οι φοιτήτριες ασχολήθηκαν με δραστηριότητες του φύλλου μαθηματικού περιεχομένου 1β, οι οποίες είχαν ως κοινό σημείο αναφοράς κάποια προβληματική κατάσταση την οποία αντιμετώπιζε ο ήρωας του βιβλίου.

Ξεκινώντας από την κλασματική αναπαράσταση του τρόπου επίλυσης του προβλήματος με τις καμήλες από τον «άνθρωπο που μετρούσε»[13], η προσπάθεια κατέληγε στη διατύπωση και λύση παρόμοιου προβλήματος από τα μέλη της ομάδας. Η δραστηριότητα αποτελούνταν από τέσσερα υποερωτήματα, τα οποία είχαν ως εξής:

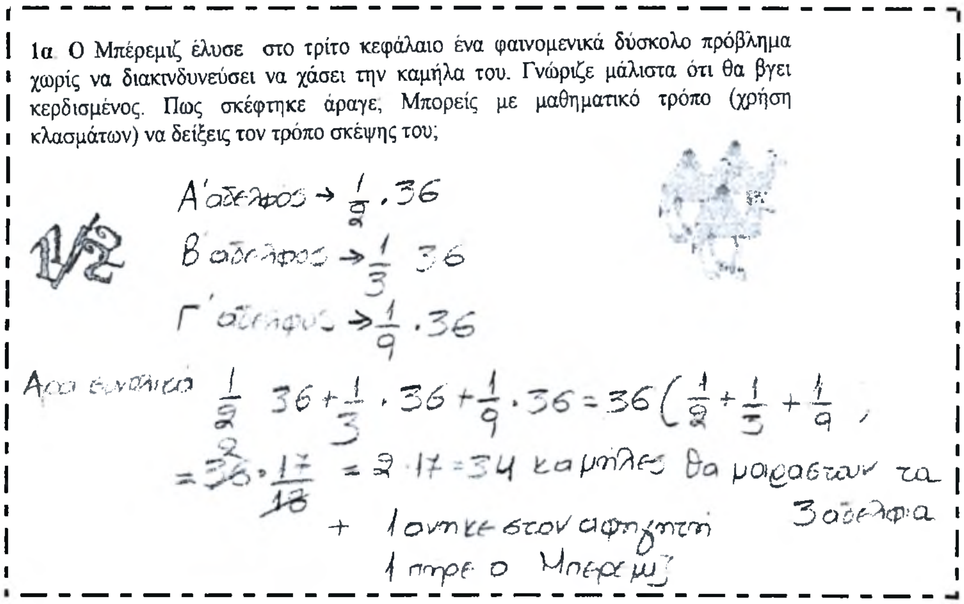
> ***1α**. Ο Μπέρεμιζ έλυσε στο τρίτο κεφάλαιο ένα φαινομενικά δύσκολο πρόβλημα χωρίς να διακινδυνεύσει να χάσει την καμήλα του. Γνώριζε μάλιστα ότι θα βγει κερδισμένος. Πως σκέφτηκε άραγε; Μπορείς με μαθηματικό τρόπο (χρήση κλασμάτων) να δείξεις τον τρόπο σκέψης του;*
>
> ***1β**. Αν οι καμήλες που έπρεπε να μοιραστούν με την ίδια αναλογία ήταν 17 τι θα συνέβαινε; Αιτιολόγησε την απάντησή σου.*
>
> ***1γ**. Μπορείς να προβλέψεις τι θα γινόταν σε περίπτωση που οι καμήλες ήταν 53;*

[13] Το πρόβλημα αυτό υπάρχει σε πολλές παραλλαγές και αναλύεται στα «Σχόλια της ελληνικής έκδοσης» από τον Μιχάλη Λάμπρου.

1δ. Βρίσκεσαι στην τάξη και διδάσκοντας κλάσματα θυμάσαι το πρόβλημα με τις καμήλες. Έχεις ξεχάσει όμως τα δεδομένα του προβλήματος. Μπορείς να δημιουργήσεις ένα παρόμοιο πρόβλημα με άλλα αριθμητικά δεδομένα;

Το υποερώτημα 1α απαντήθηκε με αποδεκτό τρόπο από επτά συμμετέχουσες (Εικόνα 4). Μία φοιτήτρια (Εικόνα 5) αν και ασχολήθηκε με την επίλυση του προβλήματος δεν κατάφερε να παρουσιάσει με μαθηματικό τρόπο τον τρόπο επίλυσης του συγκεκριμένου προβλήματος.

Εικόνα 4: Σωστή απάντηση στο ερώτημα 1α (Φύλλο εργασίας 1β)



1α. Ο Μπέρεμιζ έλυσε στο τρίτο κεφάλαιο ένα φαινομενικά δύσκολο πρόβλημα χωρίς να διακινδυνεύσει να χάσει την καμήλα του. Γνώριζε μάλιστα ότι θα βγει κερδισμένος. Πως σκέφτηκε άραγε; Μπορείς με μαθηματικό τρόπο (χρήση κλασμάτων) να δείξεις τον τρόπο σκέψης του;

Α' αδελφος $\rightarrow \frac{1}{2} \cdot 36$

Β' αδελφος $\rightarrow \frac{1}{3} \cdot 36$

Γ' αδελφος $\rightarrow \frac{1}{9} \cdot 36$

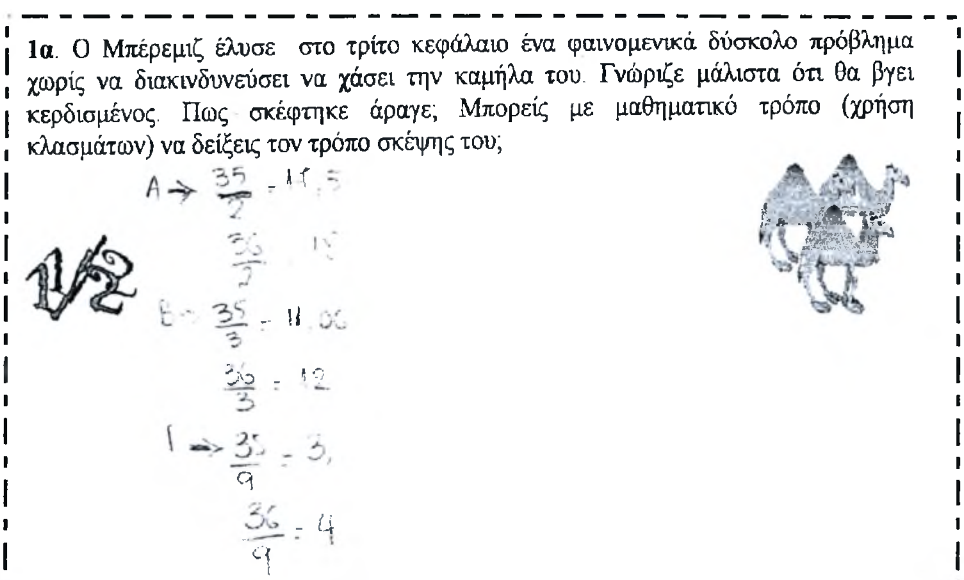
Άρα συνολικά $\frac{1}{2} \cdot 36 + \frac{1}{3} \cdot 36 + \frac{1}{9} \cdot 36 = 36\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}\right)$

$= \cancel{36}^{2} \cdot \frac{17}{\cancel{18}} = 2 \cdot 17 = 34$ καμήλες θα μοιραστούν τα 3 αδέλφια

\+ 1 ανήκε στον αφηγητή

1 πήρε ο Μπερεμίζ

Εικόνα 5: Ατελής απάντηση ερώτημα 1α (Φύλλο εργασίας 1β)



1α. Ο Μπέρεμιζ έλυσε στο τρίτο κεφάλαιο ένα φαινομενικά δύσκολο πρόβλημα χωρίς να διακινδυνεύσει να χάσει την καμήλα του. Γνώριζε μάλιστα ότι θα βγει κερδισμένος. Πως σκέφτηκε άραγε; Μπορείς με μαθηματικό τρόπο (χρήση κλασμάτων) να δείξεις τον τρόπο σκέψης του;

Α $\rightarrow \frac{35}{2} = 17,5$

$\frac{36}{2} = 18$

Β $\rightarrow \frac{35}{3} = 11,66$

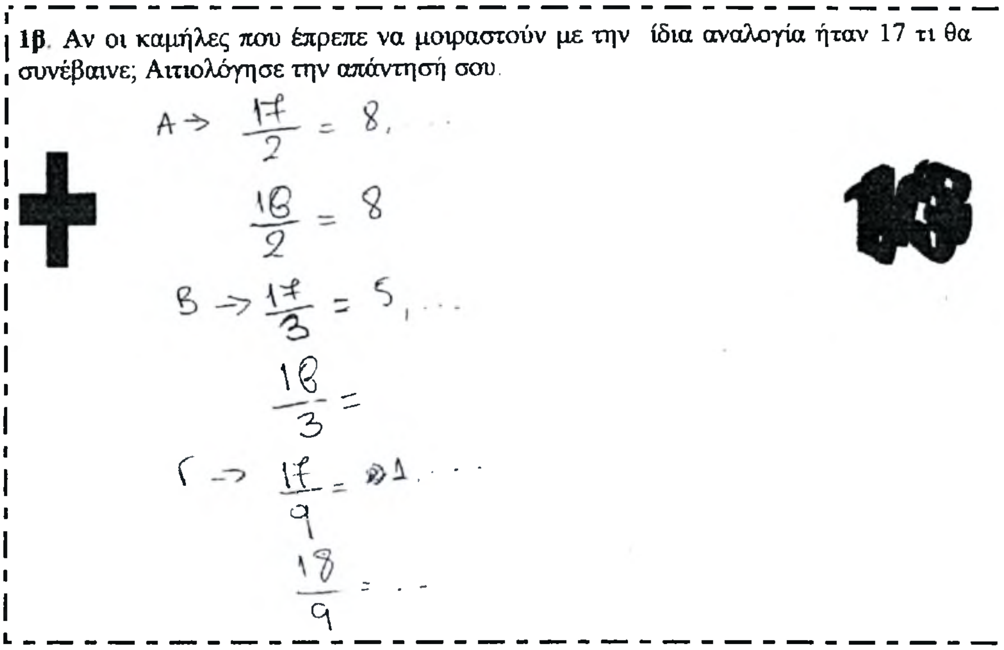
$\frac{36}{3} = 12$

Γ $\rightarrow \frac{35}{9} = 3,$

$\frac{36}{9} = 4$

Στο υποερώτημα 1β τα αποτελέσματα συνέπιπταν με αυτά του 1α. Επτά από τις οκτώ φοιτήτριες απάντησαν με μαθηματικό αποδεκτό τρόπο σε αυτό το υποερώτημα. Στην περίπτωση αυτή η φοιτήτρια, η απάντηση της οποίας κατατάσσεται ως λανθασμένη, έφτασε πολύ κοντά στη διατύπωση της σωστής απάντησης. Στην Εικόνα 6 φαίνεται να αντιμετωπίζει το πρόβλημα της διαιρετότητας του δεκαεπτά χρησιμοποιώντας ως αριθμητή στο κλάσμα τον αριθμό δεκαοκτώ. Η προσπάθεια όμως παραμένει ατελής και χωρίς αιτιολόγηση.

Εικόνα 6: Ατελής απάντηση ερώτημα 1α (Φύλλο εργασίας 1β)



1β. Αν οι καμήλες που έπρεπε να μοιραστούν με την ίδια αναλογία ήταν 17 τι θα συνέβαινε; Αιτιολόγησε την απάντησή σου.

A → $\frac{17}{2} = 8,\ldots$

$\frac{18}{2} = 8$

B → $\frac{17}{3} = 5,\ldots$

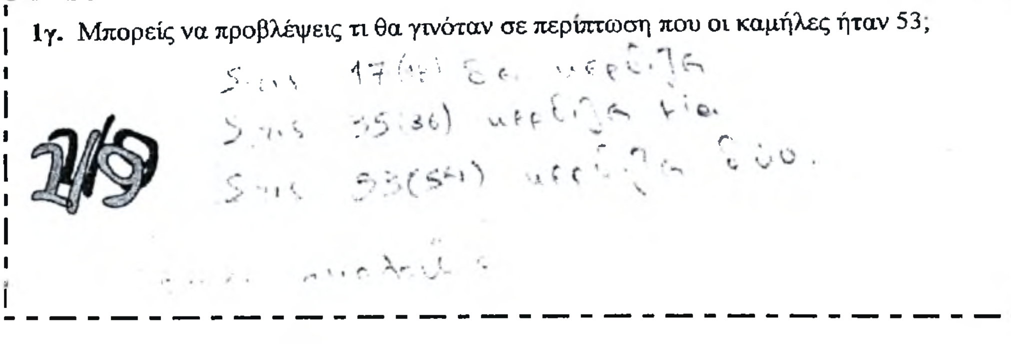
$\frac{18}{3} =$

Γ → $\frac{17}{9} = 1\ldots$

$\frac{18}{9} = \ldots$

Τα ίδια περίπου αποτελέσματα προέκυψαν από τις απαντήσεις στο υποερώτημα 1γ. Σε αυτή την περίπτωση λανθασμένες απαντήσεις δόθηκαν από δύο φοιτήτριες. Για τις σωστές απαντήσεις να σημειωθεί ότι η ερώτηση ζητούσε πρόβλεψη και όχι επίλυση του προβλήματος με πράξεις. Ωστόσο μία μόνο απάντηση ικανοποίησε αυτή την απαίτηση. Στην περίπτωση αυτή, η απάντηση που δόθηκε αξιοποίησε τις απαντήσεις στα προηγούμενα υποερωτήματα καταλήγοντας στο συμπέρασμα ότι ο αριθμός 53 και επομένως ο επόμενος του ανήκουν σε μία ακολουθία αριθμών (Εικόνα 7). Από τη στιγμή όμως που και οι άλλες απαντήσεις κατέληγαν σε σωστό αποτέλεσμα, επιλέξαμε να τις θεωρήσουμε σωστές με την παραπάνω βέβαια επισήμανση.

Εικόνα 7: Σωστή απάντηση στο ερώτημα 1γ (Φύλλο εργασίας 1β)



1γ. Μπορείς να προβλέψεις τι θα γινόταν σε περίπτωση που οι καμήλες ήταν 53;

Οι δυσκολίες οι οποίες παρατηρήθηκαν στη διατύπωση ενός παρόμοιου προβλήματος με διαφορετικά δεδομένα (υποερώτημα 1δ) δεν ήταν αναμενόμενες. Με βάση τον βαθμό δυσκολίας του προβλήματος, αλλά και το γνωστικό υπόβαθρο των φοιτητριών θεωρούσαμε ότι ένα παρόμοιο πρόβλημα θα μπορούσε να διατυπωθεί τουλάχιστον από τις φοιτήτριες που απάντησαν σωστά στα προηγούμενα υποερωτήματα. Ωστόσο, τρεις από τις οκτώ φοιτήτριες ήταν σε θέση να διατυπώσουν σωστά ένα τέτοιο πρόβλημα (Εικόνα 8). Οι υπόλοιπες προσπάθειες δημιουργίας ενός προβλήματος φανέρωναν τη σύγχυση που επικράτησε κατά τη διάρκεια αυτής της δραστηριότητας.(Εικόνα 9).

Εικόνα 8 : Διατύπωση προβλήματος στο υποερώτημα 1δ (φύλλο 1β)

1δ. Βρίσκεσαι στην τάξη και διδάσκοντας κλάσματα θυμάσαι το πρόβλημα με τις καμήλες. Έχεις ξεχάσει όμως τα δεδομένα του προβλήματος. Μπορείς να δημιουργήσεις ένα παρόμοιο πρόβλημα με άλλα αριθμητικά δεδομένα;

Εν γράψω να έχω έναν αριθμό που να μη έχει διαιρέτες τους παρονομαστές των κλασμάτων που θα ζητιέται. Έτσι, ότι αυτά θα είναι $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$

Το 71 δεν έχει διαιρέτες τους 2,3,9, ενώ 72 του

Ήταν 3 αδέρφια. Ο πατέρας τους, τους άφησε κληρονομιά 71 μαργαριτάρια με την επιθυμία ο μεγαλύτερος να πάρει το $\frac{1}{2}$, ο δεύτερος το $\frac{1}{3}$ κ ο μικρότερος το $\frac{1}{9}$. Τα αδέλφια δε μπορούσαν να μοιραστούν.

Εικόνα 9: Ατελείς απαντήσεις στο υποερώτημα 1δ (φύλλο 1β)

1δ. Βρίσκεσαι στην τάξη και διδάσκοντας κλάσματα θυμάσαι το πρόβλημα με τις καμήλες. Έχεις ξεχάσει όμως τα δεδομένα του προβλήματος. Μπορείς να δημιουργήσεις ένα παρόμοιο πρόβλημα με άλλα αριθμητικά δεδομένα;

Έχουμε ... καραμέλες και θέλουμε να τις μοιράσουμε σε ... άτομα γίνονται ... 1ο το $\frac{1}{2}$ ...

Έχω 13 μήλα και θέλω να τα μοιράσω σε 5 παιδιά. Ο πρώτος θα πάρει το 1/2 της ποσότητας, το 1/3 της ποσότητας και ο τρίτος το ποσότητας. Πόσα μήλα θα πάρει ο καθένας

$A \to \frac{13}{2} = 6,...$

$\frac{14}{2} = 7$

$B \to 13$

Επιπλέον ο χρόνος ενασχόλησης με τις δραστηριότητες ξεπέρασε τον προβλεπόμενο, αλλά δε θεωρήθηκε σωστό να διακοπεί η διαδικασία, από τη στιγμή που το ενδιαφέρον για την επίλυση παράμενε έντονο και οδηγούσε σε συνεργασία με τα άλλα μέλη της ομάδας ή με τον ερευνητή. Παρά το γεγονός ότι οι διδακτικές παρεμβάσεις δεν περιλάμβαναν ομαδικές δραστηριότητες, σε ορισμένες περιπτώσεις και όταν πλέον η λύση δεν ήταν δυνατόν να προκύψει από την ατομική αναζήτηση και προσπάθεια, η επιλογή ήταν να αφήσουμε ελεύθερα τα μέλη να αλληλεπιδράσουν και να πραγματευθούν από κοινού τις δραστηριότητες. Αυτό το οποίο τέθηκε ως προϋπόθεση συλλογικής διαπραγμάτευσης ήταν η ανάδειξη ιδεών, και η κατάθεση προτάσεων και όχι η υπόδειξη της λύσης.

Με αφορμή ένα πρόβλημα μερισμού το οποίο περιγράφεται και λύνεται από τον ήρωα του βιβλίου σχεδιάστηκε η δεύτερη ενότητα δραστηριοτήτων του φύλλου εργασίας 1β η οποία αποτελούταν από δύο υποερωτήματα:

> ***2α.*** *Στο τέταρτο κεφάλαιο (σελ.25) ο Μπέρεμιζ δίνει μία μαθηματική και μία δίκαιη λύση στο πρόβλημα της μοιρασιάς των χρυσών νομισμάτων. Αν ο Μπέρεμιζ είχε 6 καρβέλια και ο φίλος του 4 ο έμπορος θα τους πλήρωνε 10 χρυσά νομίσματα. Πώς θα μοιράζονταν τότε τα χρυσά νομίσματα οι δύο φίλοι σύμφωνα με τη μαθηματική λύση;*
>
> ***2β.*** *Υπάρχουν περιπτώσεις όπου σύμφωνα με τη μαθηματική λύση ο Μπέρεμιζ θα έπρεπε να πάρει όλα τα χρυσά νομίσματα. Πόσα καρβέλια θα έπρεπε να έχει ο Μπέρεμιζ και πόσα ο φίλος του σε μία τέτοια περίπτωση;*

Τα μέλη της ομάδας ξεπέρασαν με σχετική ευκολία ένα πρόβλημα μερισμού χρυσών νομισμάτων, παρόμοιο με το πρόβλημα που κλήθηκε να λύσει ο ήρωας του βιβλίου (Εικόνα 10). Όταν όμως ζητήθηκε η λύση ενός προβλήματος η οποία απαιτούσε διαφορετική προσέγγιση από αυτή του βιβλίου, τότε παρουσιάστηκαν δυσκολίες (Εικόνα 11). Τέσσερις από τις οκτώ φοιτήτριες απάντησαν λανθασμένα ή δεν απάντησαν καθόλου. Και σε αυτή την περίπτωση ο χρόνος ξεπέρασε την αρχική πρόβλεψη. Από την ανάλυση των επεισοδίων αλληλεπίδρασης διαπιστώθηκε ότι η συνεργασία, εξαιτίας της ύπαρξης διαφορετικών τρόπων λύσης, οδηγούσε μάλλον σε σύγχυση, εφόσον παρέμενε στο επίπεδο «επίδειξης λύσης» και όχι στην ανάδειξη των δομικών στοιχείων του προβλήματος.

Εικόνα 10: Σωστή απάντηση στο ερώτημα 2α (φύλλο 1β)

2α. Στο τέταρτο κεφάλαιο (σελ.25) ο Μπέρεμιζ δίνει μία μαθηματική και μία δίκαιη λύση στο πρόβλημα της μοιρασιάς των χρυσών νομισμάτων. Αν ο Μπέρεμιζ είχε 6 καρβέλια και ο φίλος του 4 ο έμπορος θα τους πλήρωνε 10 χρυσά νομίσματα. Πώς θα μοιράζονταν τότε τα χρυσά νομίσματα οι δύο φίλοι σύμφωνα με τη μαθηματική λύση;

Αφού το 1 καρβέλι δίνει 3 κομμάτια τα 6 καρβέλια του Μπέρεμιζ θα δώσουν 18 κομμάτια

Παρόμοια τα 4 καρβέλια θα δώσουν 12 κομμάτια.

Συνολικά 30 κομμάτια

10 10 10

Άρα ο Μπέρεμιζ έφαγε 8 και ο φίλος του 2

Εικόνα 11: Λανθασμένη απάντηση (φύλλο 1β)

2β. Υπάρχουν περιπτώσεις όπου σύμφωνα με τη μαθηματική λύση ο Μπέρεμιζ θα έπρεπε να πάρει όλα τα χρυσά νομίσματα. Πόσα καρβέλια θα έπρεπε να έχει ο Μπέρεμιζ και πόσα ο φίλος του σε μία τέτοια περίπτωση;

Αν τα νομίσματα ήταν 10 ο Μπέρεμιζ θα έπαιρνε και τα 10 εάν

$6 \cdot 3 = 18$	$? \cdot 3 = 20$
$4 \cdot 3 = 12$	$? \cdot 3 = 10$
$12 + 18 = 30$	$20 + 10 = 30$
$18 - 10 = 8 \leftarrow 10$	$20 - 10 = 10$
$12 - 10 = 2 \leftarrow 0$	$10 - 10 = 0$

Οι ερωτήσεις της επόμενης ενότητας δραστηριοτήτων, με αφετηρία ένα πρόβλημα του βιβλίου το οποίο επιλύεται με χρήση αναλογιών διατυπώθηκαν ως εξής:

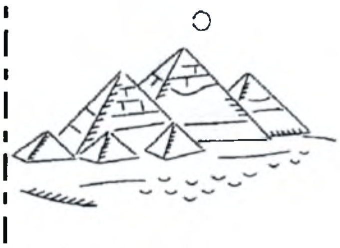
> *3α. Το πρόβλημα που παρουσιάζεται στο κεφάλαιο 5 λύνεται με αναλογίες. Ποια ιδιότητα των κλασμάτων χρησιμοποιείται στη δημιουργία αναλογιών;*
>
> *3β. Μια παρόμοια μέθοδο χρησιμοποίησε ο Θαλής ο Μιλήσιος ώστε να μετρήσει το ύψος της πυραμίδας του Χέοπα, χρησιμοποιώντας μετρήσεις των σκιών της πυραμίδας και του εαυτού του. Μπορείς να σκεφτείς την αναλογία που χρησιμοποίησε;*

Σχετικά με τις απαντήσεις στο ερώτημα 3α, πρέπει να αναφερθεί η δυσκολία κατανόησης της ερώτησης και της εύρεσης της ιδιότητας των κλασμάτων που χρησιμοποιείται στη δημιουργία αναλογιών. Παρότι δόθηκε σωστή απάντηση από το σύνολο των φοιτητριών οι συνεχείς ερωτήσεις για την επεξήγηση της ερώτησης και η διστακτικότητα με την οποία έγραψαν την απάντηση φανέρωναν αβεβαιότητα για τη σωστή απάντηση. Όπως διαπιστώθηκε από τη συζήτηση που ακολούθησε, ενώ η ισοδυναμία κλασμάτων ήταν μια έννοια πολύ γνωστή στα μέλη της ομάδας, ο τρόπος που τέθηκε η ερώτηση ανέδειξε τη δυσκολία σύνδεσής της με τις αναλογίες

Η επόμενη δραστηριότητα αφορούσε την εύρεση της αναλογίας την οποία χρησιμοποίησε ο Θαλής για τη μέτρηση του ύψους της πυραμίδας του Χέοπα. Στην περίπτωση αυτή οι απαντήσεις δόθηκαν γρήγορα και σωστά από όλες τις φοιτήτριες (Εικόνα 12). Σε αντίθεση με το προηγούμενο ερώτημα οι απαντήσεις δόθηκαν με σιγουριά και βεβαιότητα.

Εικόνα 12: Σωστή απάντηση στο ερώτημα 2α (φύλλο 1β)

3β. Μια παρόμοια μέθοδο χρησιμοποίησε ο Θαλής ο Μιλήσιος ώστε να μετρήσει το ύψος της πυραμίδας του Χέοπα, χρησιμοποιώντας μετρήσεις των σκιών της πυραμίδας και του εαυτού του. Μπορείς να σκεφτείς την αναλογία που χρησιμοποίησε;



$$\frac{\text{Ύψος Θαλή}}{\text{μηκος σκιάς του}} = \frac{\text{Ύψος πυραμίδας}}{\text{μηκος σκιάς πυραμίδας + μισό μήκος βάσης}}$$

Συμπερασματικά, από την επεξεργασία των απαντήσεων στο πρώτο φύλλο εργασίας μαθηματικού περιεχομένου (1β) και των απομαγνητοφωνημένων επεισοδίων αλληλεπίδρασης διαπιστώθηκε συσχέτιση των δυσκολιών, του απαιτούμενου χρόνου και του είδους των απαντήσεων με το έτος σπουδών και την λυκειακή κατεύθυνση. Σε σχέση με το έτος σπουδών φαίνεται ότι η παρακολούθηση και η συμμετοχή σε πανεπιστημιακά μαθήματα μαθηματικών οδηγεί -αν και όχι σε μεγάλο βαθμό- σε πιο ελεύθερη και δημιουργική σκέψη, απομακρύνοντάς την από τον φορμαλιστικό, παραγωγικό χαρακτήρα των μαθηματικών όπως αυτά διδάσκονται στο Λύκειο. Η λυκειακή κατεύθυνση έχει να κάνει με το γνωστικό μαθηματικό υπόβαθρο των φοιτητριών από τη στιγμή που ο εξεταστικός προσανατολισμός της εκπαιδευτικού συστήματος δεν επιτρέπει την εμβάθυνση σε γνωστικά αντικείμενα τα οποία δεν προσφέρουν βαθμολογικά στις εξετάσεις εισαγωγής στην τριτοβάθμια εκπαίδευση. Έτσι, τα μαθηματικά παραμένουν ένας άγνωστος κόσμος για πολλούς φοιτητές και πολλές φοιτήτριες που προέρχονται από τη θεωρητική κατεύθυνση. Όσον αφορά τις τρεις φοιτήτριες του δείγματος της παρούσας έρευνας οι οποίες προέρχονταν από αυτήν την κατεύθυνση, ήταν φανερό ότι υπήρχαν γνωστικές ελλείψεις που αντιστοιχούσαν σε χαμηλότερες βαθμίδες εκπαίδευσης.

6.1.3 Η 2η διδακτική παρέμβαση

Στη δεύτερη συνάντηση συμμετείχαν επτά φοιτήτριες. Η συνάντηση για τη δεύτερη διδακτική παρέμβαση ξεκίνησε με τη συζήτηση των ερωτημάτων του φύλλου πολιτισμικής πλαισίωσης 2α. Η περιληπτική απόδοση των κεφαλαίων του βιβλίου που αντιστοιχούσαν στο δεύτερο φύλλο εργασίας (2α) δεν παρουσίασε κάποια αξιοσημείωτη δυσκολία. Το δεύτερο ερώτημα αποτελούμενο από δύο υποερωτήματα διατυπωνόταν ως εξής:

> *2. Στις σελίδες 49 και 50 αναφέρεται ότι «Γεωμετρία υπάρχει παντού» και ότι ο «Θεός είναι ο Μέγας Γεωμέτρης» φράσεις που θυμίζουν έντονα το ρητό «Θεός αεί γεωμετρεί» που αποδίδεται στους Πυθαγόρειους. Η άποψη αυτή μάλιστα ενισχύεται με τη χρήση παραδειγμάτων από την καθημερινή ζωή.*
>
> *i. Σε ποιο έργο του εκφράζει αντίστοιχες απόψεις ο Πλάτων; Ανάφερε πολύ σύντομα, ποιες είναι αυτές; Περίφημη είναι και μια σχετική φράση του Γαλιλαίου. Τι είπε; Τι νομίζεις πώς εννοείται σε κάθε περίπτωση;*
>
> *ii. Ποια είναι η δική σου γνώμη; Τα μαθηματικά υπάρχουν με κάποιον τρόπο στη φύση (αν ναι με ποιον τρόπο;) ή σε ορισμένες περιστάσεις βλέπουμε «εμείς» τη φύση με μαθηματικό τρόπο;*

Με αφορμή αυτό το ερώτημα που παράπεμπε στη «θεωρία των ιδεών» του Πλάτωνα τέθηκαν από τις φοιτήτριες ερωτήσεις οι οποίες ανεδείκνυαν το ενδιαφέρον τους σχετικά με το θέμα. Άλλωστε ένας από τους στόχους της έρευνας ήταν η ανάδειξη των δυνατοτήτων που προσφέρει η ιστορία των μαθηματικών στη διδασκαλία και τη μάθησή τους. Διατυπώθηκαν ερωτήσεις και προβληματισμοί όπως:

> *Σ.Π.: Ο Πλάτωνας έλεγε ας πούμε ότι κάτι που δεν υπάρχει σε υλικό... να υπάρχει σαν ιδέα;*
>
> *Δ: Αντικείμενα που δεν υπάρχει η ιδέα τους όμως δεν υπάρχουν.*
>
> *Δ: Και κάτι που μπορεί να μην υπάρχει εδώ... υπάρχει ιδέα.*

Σ.Μ.: Να κάνω μια ερώτηση; Κι όταν ας πούμε υπήρχε μια καινούρια ανακάλυψη τότε...;

Σ.Μ.: Ο πλατωνισμός όμως τι πίστευε; Πίσω από αυτή τη ζωή τι υπάρχει; Υπάρχει κάποια άλλη ζωή; Οι ψυχές είναι... δηλαδή υπήρχε πάλι ψυχή.

Σ.Π.: Ναι, αλλά όταν οι επιστήμονες ανακαλύπτουν κάτι που δεν υπάρχει ή το φτιάχνουν αυτοί, τότε δεν είναι ανακάλυψη, είναι εφεύρεση... Αυτό είναι κοινή λογική. Δεν το πιστεύω μόνο εγώ.

Με αφορμή τα ερωτήματα και τον προβληματισμό των φοιτητριών η συζήτηση επικεντρώθηκε σε φιλοσοφικές αναζητήσεις για τη σχέση της «θεωρίας των ιδεών» με την αισθησιοκρατία του Αριστοτέλη και τις επιπτώσεις των θεωριών αυτών στις παιδαγωγικές θεωρίες.

Ενδιαφέρον επίσης παρουσίασε και η συζήτηση για τη ζωή και τον θάνατο της Υπατίας σε σχέση με τις θρησκευτικές διαμάχες της εποχής εκείνης. Η σχετική ερώτηση διατυπώθηκε ως εξής:

***3α.** Στη σελίδα 58 παρουσιάζεται η άποψη –που ήταν κυρίαρχη παλαιότερα - ότι η γυναίκα δεν μπορεί να μάθει και να κατανοήσει τα Μαθηματικά. Παρ' όλο το αρνητικό κλίμα και την καχυποψία πολλές γυναίκες ασχολήθηκαν και συνέβαλλαν στην εξέλιξη των Μαθηματικών. Η πρώτη –γνωστή- από αυτές ήταν η Υπατία η Αλεξανδρινή. Γράψε λίγα λόγια (περίπου 100 λέξεις) για τη ζωή και το έργο της.*

Κατά την παράθεση στοιχείων σχετικά τον τρόπο θανάτου της Υπατίας παρατηρήθηκε έντονο ενδιαφέρον Ζητήθηκαν επιπλέον πληροφορίες, οι οποίες και παρουσιάστηκαν με τη μορφή διάλεξης.

Σε υψηλά επίπεδα ενδιαφέροντος εξελίχθηκε και η συζήτηση για τις διαφορές αγοριών και κοριτσιών σε σχέση με τα μαθηματικά και τις φυσικές επιστήμες γενικότερα. Σύμφωνα με το ερώτημα 3β:

3β.

«Οι γυναίκες έχουν λιγότερη έμφυτη ικανότητα στις Φυσικές Επιστήμες και τα Μαθηματικά από τους άντρες. Η μία ομάδα ξεπερνά την άλλη εξαιτίας γενετικών διαφορών και όχι εμπειριών και η θεωρία πως οι άντρες είναι πιο ικανοί στις Φυσικές Επιστήμες στηρίζεται σε έρευνες και όχι στην προσωπική μου άποψη. Τα αγόρια επιτυγχάνουν υψηλότερα σκορ στις εξετάσεις από τα κορίτσια και οι διαφορές αυτές χρειάζονται περισσότερη διερεύνηση».

L. Summers, Πρόεδρος του Πανεπιστημίου Harvard

Πηγή:http://news.bbc.co.uk/hi/uk_news education/4183495.stm)

Απόψεις σαν κι αυτή του προέδρου του Harvard, ο οποίος αναγκάστηκε να παραιτηθεί ένα χρόνο αργότερα και εξαιτίας της αναταραχής που προκάλεσαν οι απόψεις του, φαίνεται ότι δεν έχουν πάψει να κυκλοφορούν και βρίσκουν θέση ακόμη και σήμερα στη συζήτηση, για τη σχέση γυναίκας – επιστήμης.

Ποια επιχειρήματα θα χρησιμοποιούσες για να αντικρούσεις τέτοιες απόψεις; Τα επιχειρήματά σου θα πρέπει να στηρίζονται σε επιστημονικά-ερευνητικά ευρήματα και αποτελέσματα που προκύπτουν από τη σχετική βιβλιογραφία, ώστε να δοθεί έγκυρη και αξιόπιστη απάντηση στις παραπάνω απόψεις.

Ενδεικτική του ενδιαφέροντος που προκάλεσε η ερώτηση 3β είναι η παρακάτω απάντηση:

> *«Σήμερα γνωρίζουμε ότι υπάρχουν όντως σημαντικές διαφορές μεταξύ του εγκεφάλου της γυναίκας και του άνδρα. Οι γυναίκες εμφανίζονται στις μελέτες να έχουν περισσότερες συνδέσεις μεταξύ των δύο ημισφαιρίων του εγκεφάλου, ενώ σε συγκεκριμένες περιοχές διαθέτουν και περισσότερους νευρώνες. Επίσης οι γυναίκες χρησιμοποιούν περισσότερα τμήματα του εγκεφάλου για να εκτελέσουν κάποια καθήκοντα. Η ερευνητική ομάδα του Haier πρόσφατα ανακάλυψε ότι οι περιοχές του εγκεφάλου που σχετίζονται με την ευφυΐα είναι διαφορετικές σε άνδρες και γυναίκες.«Ο αρσενικός εγκέφαλος έχει διαφορετική αρχιτεκτονική από τον θηλυκό, αλλά δεν ξέρουμε τι σημαίνει αυτό», λέει ο Richard Haier, καθηγητής Ψυχολογίας. Οι βιολογικές διαφορές που έχουν εντοπιστεί δεν μπορούν να ερμηνεύσουν και νοητικές διαφορές. (Κατή 1990)*
>
> *Επιπλέον, οι βιολογικοί παράγοντες δεν παίζουν ρόλο εάν δεν ενεργοποιηθούν από τις κοινωνικές συνθήκες. Η ικανότητα του εγκεφάλου να αλλάζει και να βελτιώνεται είναι μάλλον αυτό που μπορεί να κάνει καλύτερα από οτιδήποτε άλλο. Πρόσφατο πείραμα που έγινε σε γυναίκες στο πανεπιστήμιο Temple απέδειξε ότι παίζοντας τέτρις μόλις δύο ώρες την εβδομάδα, ύστερα από δέκα εβδομάδες, απέκτησαν πολύ καλύτερη αίσθηση του χώρου. Ο Leonard Sax, φυσικός και ψυχολόγος, τονίζει ότι «η γυναίκα μπορεί να ακούσει, να μυρίσει και να δει πράγματα που ο άνδρας δεν μπορεί». Αλλά καθώς τα μάτια, τα αφτιά και η μύτη είναι οι πύλες του εγκεφάλου, επηρεάζουν την ανάπτυξή του. Καταληκτικά, η νοημοσύνη η οποία είναι ένα φαινόμενο ψυχολογικό, είναι συνάρθρωση βιολογικών, κοινωνικών και πολιτιστικών φαινομένων».*

Κατά τη διάρκεια της συζήτησης, οι περισσότερες από τις συμμετέχουσες είχαν μια άποψη ή ένα προσωπικό βίωμα να καταθέσουν ανοίγοντας νέους δρόμους στη συζήτηση η οποία κατέληξε σε συμπεράσματα, τα οποία μέχρι εκείνη τη στιγμή δεν έτυχε να γίνουν από τις ίδιες αντικείμενο βαθύτερης σκέψης ή αναστοχασμού.

Οι γραπτές απαντήσεις του φύλλου πολιτισμικής πλαισίωσης 2α βελτιώθηκαν σε σχέση με το φύλλο εργασίας 1α όχι μόνο από άποψη μορφής αλλά και στο επίπεδο της ποιότητας του περιεχομένου. Το γεγονός αυτό εξηγείται αφενός από την αποκτηθείσα εμπειρία και τα προφορικά σχόλια στα πρώτα φύλλα εργασίας, αφετέρου από το ενδιαφέρον που παρουσίασαν τα θέματα για τα μέλη της ομάδας. Οι βιβλιογραφικές αναφορές της Δ.(Εικόνα 13) σχετικά με το ερώτημα 2 μπορούν να ερμηνευθούν ως αποτέλεσμα του ενδιαφέροντος που προκάλεσε στη φοιτήτρια το συγκεκριμένο ερώτημα.

Εικόνα 13: Βιβλιογραφικές αναφορές (φύλλο 2α)

Πηγές: Μπούσουλα, Ν. *Εισαγωγή στη Φιλοσοφία.* Σημειώσεις του μαθηματικού τμήματος του Α.Π.Θ.

http://www.mathsforyou.gr/images/KMN/math_fisis.htm

Hughes, M. (2002). *Τα παιδιά και η έννοια των αριθμών.* Αθήνα: εκδόσεις Gutenberg.

Στην πρώτη ενότητα του φύλλου μαθηματικού περιεχομένου 2β, οι φοιτήτριες αξιοποιώντας απόσπασμα του βιβλίου ασχολήθηκαν με τον αριθμό 256 που αποτελεί δύναμη του 2, αλλά ταυτόχρονα είναι και τετράγωνος αριθμός. Συγκεκριμένα, η ερώτηση με τα δύο υποερωτηματά της διατυπώνονταν ως εξής:

> ***1α.*** *Στη σελίδα 39 του κεφαλαίου 6 αναφέρεται ότι ο 256 αποτελεί δύναμη του 2 ενώ ταυτόχρονα είναι και τετράγωνος αριθμός. Γιατί είναι τετράγωνος αριθμός; Ποια δύναμη του 2 είναι ο 16;*
> ***1β.*** *Ο αριθμός 529 που αναφέρει ο Μπέρεμιζ είναι δύναμη του 2; Γιατί;*

Το υποερώτημα 1α απαντήθηκε από όλες τις συμμετέχουσες με σχετική ευκολία (Εικόνα 14). Ωστόσο, πρέπει να σημειωθεί ότι η ευκολία αυτή δημιούργησε υποψίες και αμφιβολίες σχετικά με το κατά πόσο η απάντηση είναι σωστή ή όχι. Από τη συζήτηση που ακολούθησε, διαπιστώθηκε ότι η αντίληψη που είχαν οι φοιτήτριες για τα μαθηματικά είναι πως αυτά συνδέονται με σύνθετες, δύσκολες και χρονοβόρες δραστηριότητες και επομένως απλές και εύκολες απαντήσεις είναι συνήθως λανθασμένες.

Εικόνα 14: Σωστή απάντηση στην ερώτηση 1α (φύλλο 2β)

1α. Στη σελίδα 39 του κεφαλαίου 6 αναφέρεται ότι ο 256 αποτελεί δύναμη του 2 κ
ταυτόχρονα είναι και τετράγωνος αριθμός. Γιατί είναι τετράγωνος αριθμός; Π
δύναμη του 2 είναι ο 16;

$256 = 16 \times 16 = 16^2$

$2^4 = 16$

Στην περίπτωση της ερώτησης 1β για το αν ο αριθμός 529 είναι δύναμη του 2, πάρα την αρχική υπόθεση ότι πρόκειται για αρκετά εύκολη δραστηριότητα, παρατηρήθηκε δυσχέρεια στην απάντηση που εκδηλώθηκε με υπερβολικά μεγάλη χρονική διάρκεια διαπραγμάτευσης, ενώ υπήρξε και μία περίπτωση όπου δε δόθηκε απάντηση. Εκτός από την απάντηση που παρουσιάζεται στην Εικόνα 15 και δόθηκε από τρεις φοιτήτριες με μικρές παραλλαγές, η αιτιολόγηση στις υπόλοιπες σωστές απαντήσεις είχε την εξής μορφή:

- Το 529 δεν είναι δύναμη του 2 γιατί είναι πρώτος αριθμός.
- Το 529 είναι περιττός αριθμός.
- Το 2 δε διαιρεί ακριβώς το 529.

Εικόνα 15: Σωστή απάντηση στην ερώτηση 1β (φύλλο 2β)

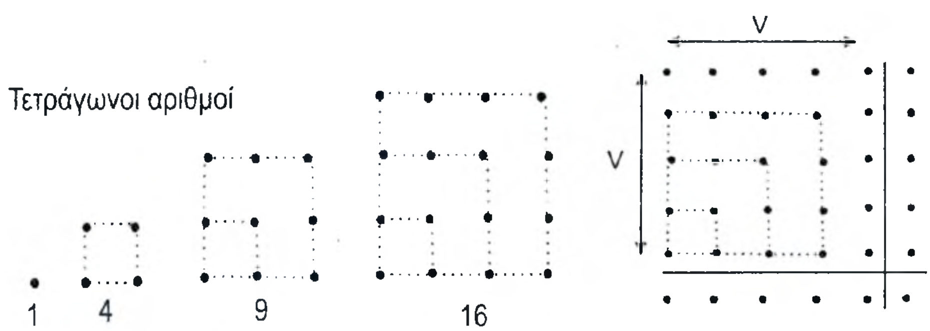
1β. Ο αριθμός 529 που αναφέρει ο Μπέρεμιζ είναι δύναμη του 2; Γιατί;

$529 = 23 \times 23 = 23^2$

Δεν είναι δύναμη του 2, γιατί οι 2 παράγοντες του 23 και 23 είναι πρώτοι αριθμοί.

Η δεύτερη ενότητα ερωτήσεων αποτελούταν από τέσσερα υποερωτήματα:

2α. Οι Πυθαγόρειοι χρησιμοποιούσαν τον παρακάτω τρόπο για να δημιουργήσουν τετράγωνους αριθμούς:



i. *Γιατί νομίζεις ότι αυτοί οι αριθμοί ονομάζονται τετράγωνοι ή τετραγωνικοί;*

ii. *Από τα τέσσερα πρώτα παραδείγματα φαίνεται εύλογο να υποθέσουμε ότι:*

$1+3+5+7+9+\dots\dots\dots+(2\nu-1) = \nu^2$ *(ν =θετικός ακέραιος αριθμός)*

Δείξε ότι η σχέση αυτή ισχύει για τον τετράγωνο αριθμό $\nu^2 = 100$. *Μπορείς να με πείσεις ότι ισχύει για όλους τους αριθμούς;*

iii. *Πόσοι τετράγωνοι αριθμοί υπάρχουν από το 2 έως το 101;*

iv. *Τι αποτέλεσμα προκύπτει όταν το πλήθος των προσθετέων είναι άρτιος και τι όταν είναι περιττός αριθμός;*

Σε σχέση με την ερώτηση 2α.i διαπιστώθηκε ότι, με την αξιοποίηση των σχηματικών αναπαραστάσεων, έγινε κατανοητός από όλες τις συμμετέχουσες ο τρόπος δημιουργίας από τους πυθαγόρειους των τετράγωνων ή τετραγωνικών αριθμών. Το ίδιο συνέβη και με τη δραστηριότητα 2α.ii, η οποία τουλάχιστον κατά το ένα σκέλος της απαντήθηκε εύκολα και γρήγορα. Στην περίπτωση γενίκευσης της σχέσης «ώστε να ισχύει για όλους τους αριθμούς» χρησιμοποιήθηκε η επαγωγική μέθοδος από τρεις φοιτήτριες (Εικόνα 16) ενώ οι υπόλοιπες είτε δεν απάντησαν είτε ακούγοντας τη λέξη «επαγωγή», την κατέγραψαν ως τρόπο επίλυσης χωρίς την περαιτέρω επεξεργασία της απάντησης.

Εικόνα 16: Απάντηση δραστηριότητας 2α.ii (φύλλο 2β)

ii. Από τα τέσσερα πρώτα παραδείγματα φαίνεται εύλογο να υποθέσουμε ότι:

(Α) $1+3+5+7+9+\dots\dots\dots+(2\nu-1) = \nu^2$ *(ν =θετικός ακέραιος αριθμός)*

Πηγή: Αναπολιτάνος,Δ.(1985). *Εισαγωγή στη φιλοσοφία των Μαθηματικών*. Αθήνα: Νεφέλη

Δείξε ότι η σχέση αυτή ισχύει για τον τετράγωνο αριθμό $\nu^2 = 100$. Μπορείς να με πείσεις ότι ισχύει για όλους τους αριθμούς;

$1+3+5+7+9+11+13+15+17+19 = 100 \Leftrightarrow 100=100$

Έστω ότι η σχέση Α ισχύει για κάθε θετικό ακέραιο αριθμό ν.

Θα ελέγξουμε αν ισχύει για τον ν+1, και τότε θα ισχύει για όλους τους θετικούς ακέραιους.

$1+3+5+7+9+\dots+[2\cdot(\nu+1)-1] = (\nu+1)^2$

$1+3+5+7+9+\dots+(2\nu+2-1) = (\nu+1)^2$

$1+3+5+7+9+\dots+(2\nu+1) = \nu^2+2\nu+1$

Εύκολος, όπως διαπιστώθηκε, ήταν ο εντοπισμός του πλήθους των τετράγωνων αριθμών που βρίσκονται στην πρώτη εκατοντάδα. Ωστόσο υπήρξαν δύο περιπτώσεις μη ολοκληρωμένων απαντήσεων όπως φαίνεται στην Εικόνα 17. Στην περίπτωση αυτή ενώ αναφέρονται οι αριθμοί υψωμένοι στο τετράγωνο(και όχι οι τετράγωνοι αριθμοί) παραλείπεται επιπλέον ο πρώτος ζητούμενος τετράγωνος αριθμός ($4= 2^2$).

Εικόνα 17: Ατελής απάντηση στην ερώτηση 2α.iii (φύλλο 2β)

iii. Πόσοι τετράγωνοι αριθμοί υπάρχουν από το 2 έως το 101;

3^2
4^2
5^2
6^2
7^2
8^2
9^2
10^2

= 8αριθμοί

Δυσκολίες προέκυψαν για τρεις φοιτήτριες στην περίπτωση του αποτελέσματος (άρτιος ή περιττός αριθμός) που προκύπτει από την πρόσθεση των προσθετέων της σχέσης που είχε δοθεί στην ερώτηση 2α.ii. Οι δύο φοιτήτριες δεν απάντησαν ενώ η απάντηση της τρίτη φοιτήτριας δεν οδηγεί σε κάποιο συμπέρασμα (Εικόνα 17)

Εικόνα 18: Λανθασμένη απάντηση στην ερώτηση 2α.iv (φύλλο 2β)

Τι αποτέλεσμα προκύπτει όταν το πλήθος των προσθετέων είναι άρτιος και τι όταν είναι περιττός αριθμός;

Έστω ν ακέραιος θετικός αριθμός.

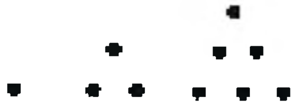
$2ν + 2ν + \dots + 2ν$ = άρτιος

$ν + ν + \dots + ν$ = περιττός

Να σημειωθεί ωστόσο, ότι από μία φοιτήτρια τέθηκε η ερώτηση: «ποιοι είναι οι άρτιοι και ποιοι οι περιττοί αριθμοί;» και αρκετές φοιτήτριες γύρισαν το κεφάλι τους να ακούσουν την απάντηση, κάτι το οποίο φανέρωσε την αβεβαιότητά τους σχετικά με αυτούς αριθμούς. Οι μονοί και ζυγοί αριθμοί ήταν όροι πιο οικείοι σε αυτές, γεγονός που μπορεί να ερμηνευθεί από την εκτεταμένη χρήση αυτών των όρων –αντί των όρων άρτιος και περιττός- κατά τη μαθητική τους σταδιοδρομία.

Στη συνέχεια η ομάδα ασχολήθηκε με τους τριγωνικούς αριθμούς. Η ερώτηση με τα τέσσερα υποερωτήματα διατυπωνόταν ως εξής:

> ***2β.*** *Με τον ίδιο τρόπο οι Πυθαγόρειοι δημιουργούσαν τριγωνικούς αριθμούς όπως στο παρακάτω σχήμα..*



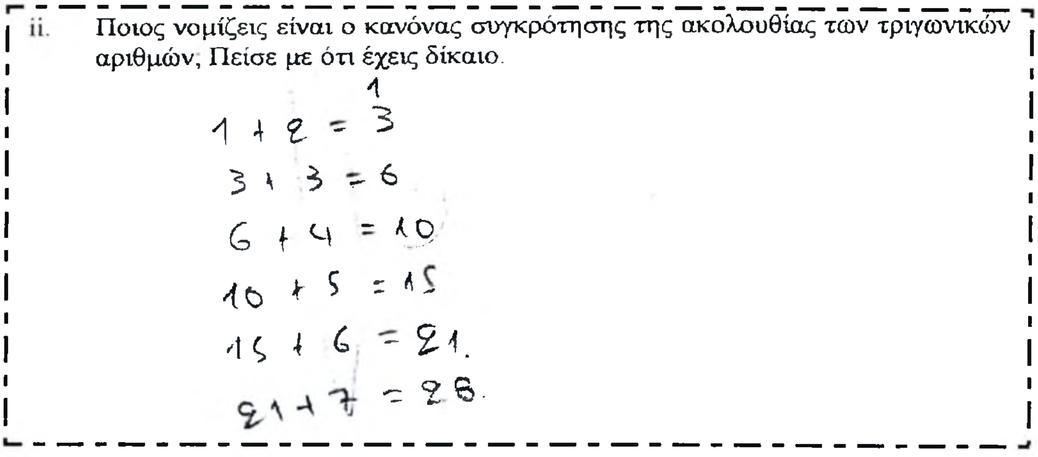
Πηγή: http://users.sch.gr/kassetas/ed0math22.htm

i. Συμπλήρωσε στην παραπάνω ακολουθία τους επόμενους δύο τριγωνικούς αριθμούς και γράψε από κάτω τους ποιον αριθμό αντιπροσωπεύουν.
ii. Ποιος νομίζεις είναι ο κανόνας συγκρότησης της ακολουθίας των τριγωνικών αριθμών; Πείσε με ότι έχεις δίκαιο.
iii. Με τι ισούται το άθροισμα 1+2+3+...+10; Το άθροισμα 1+2+3+...+100; Το άθροισμα 1+2+3+...+ν;
iv. Εξέτασε αν αληθεύει η παρακάτω πρόταση: «Κάθε τετραγωνικός αριθμός είναι άθροισμα δύο διαδοχικών τριγωνικών αριθμών».

Από τη δημιουργία μιας σειράς τριγωνικών αριθμών(ερώτηση 2β.i) και τη διατύπωση του κανόνα συγκρότησης της ακολουθίας των τριγωνικών αριθμών στην ερώτηση 2β.ii (Εικόνα 19) που δεν παρουσίασε κάποια αξιοσημείωτη δυσκολία, η προσοχή εστιάστηκε στον τρόπο που οι φοιτήτριες θα προσέγγιζαν το πρόβλημα της εύρεσης του αθροίσματος των εκατό πρώτων φυσικών ακέραιων αριθμών[14]. Αντίθετα με την πρόβλεψη ότι το πρόβλημα αυτό θα δημιουργούσε δυσκολίες, διαπιστώθηκε ότι απαντήθηκε σε πολύ μικρό χρονικό διάστημα από όλες τις συμμετέχουσες (Εικόνα 20). Σε δύο περιπτώσεις μάλιστα αναφέρθηκε χωρίς επιπλέον σχολιασμό ως αποτέλεσμα ο τύπος ν/2 (ν+1). Στην εύλογη ερώτηση μας, η εξήγηση που δόθηκε ήταν ότι το είχαν διδαχθεί σε προηγούμενο εξάμηνο στο πλαίσιο της παρακολούθησης υποχρεωτικού μαθήματος μαθηματικών του Παιδαγωγικού Τμήματος.

[14] Το πρόβλημα αυτό συνδεέται με το όνομα του Karl Friedrich Gauss(1775-1855), ο οποίος σε ηλικία δέκα ετών ανέπτυξε μία τεχνική για τον υπολογισμό του αθροίσματος των εκατό πρώτων φυσικών ακέραιων αριθμών.

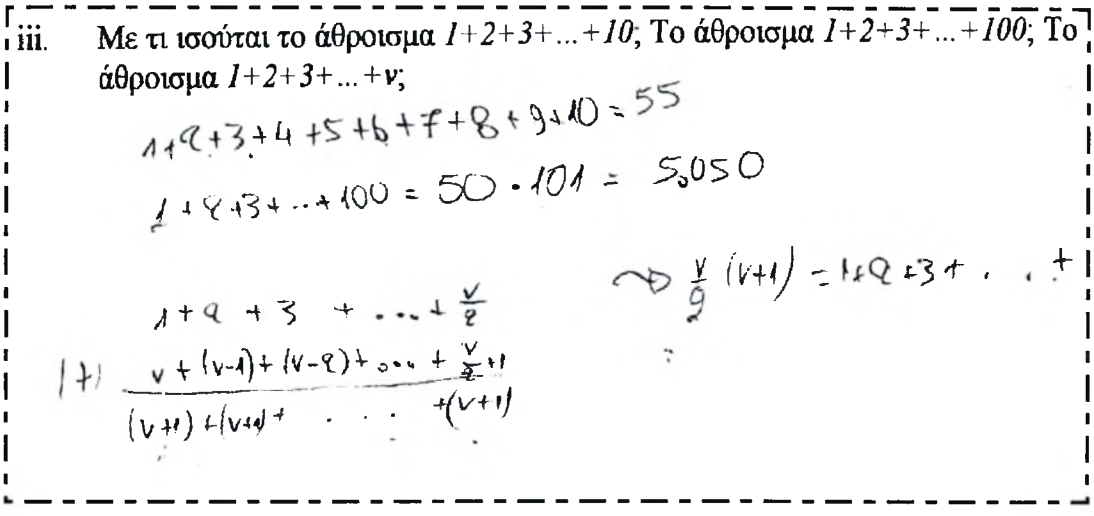
Εικόνα 19: Σωστή απάντηση στην ερώτηση 2β.ii (φύλλο 2β)



ii. Ποιος νομίζεις είναι ο κανόνας συγκρότησης της ακολουθίας των τριγωνικών αριθμών; Πείσε με ότι έχεις δίκαιο.

$1 + 2 = 3$
$3 + 3 = 6$
$6 + 4 = 10$
$10 + 5 = 15$
$15 + 6 = 21.$
$21 + 7 = 28.$

Εικόνα 20: Σωστή απάντηση στην ερώτηση 2β.iii (φύλλο 2β)



iii. Με τι ισούται το άθροισμα $1+2+3+...+10$; Το άθροισμα $1+2+3+...+100$; Το άθροισμα $1+2+3+...+v$;

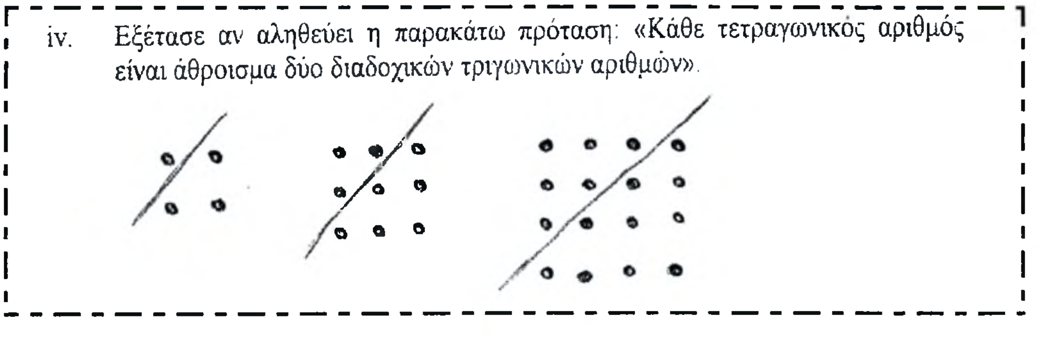
$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=55$
$1+2+3+...+100 = 50 \cdot 101 = 5.050$

$1+2+3+...+\frac{v}{2}$
$(+)\ v+(v-1)+(v-2)+...+\frac{v}{2}+1$
$(v+1)+(v+1)+\ ...\ +(v+1)$

$\frac{v}{2}(v+1) = 1+2+3+...+$

Στο τελευταίο υποερώτημα αυτής της ενότητας δραστηριοτήτων απάντηση δε δόθηκε από μία φοιτήτρια. Από τις υπόλοιπες σωστές απαντήσεις αξιοσημείωτη είναι η σχηματική απόδοση της πρότασης: *«Κάθε τετραγωνικός αριθμός είναι άθροισμα δύο διαδοχικών τριγωνικών αριθμών».* Όπως φαίνεται στην Εικόνα 21, κάθε τετραγωνικός αριθμός μπορεί να δημιουργηθεί από δύο τριγωνικούς αριθμούς όταν αυτοί τοποθετηθούν κατάλληλα ο ένας δίπλα στον άλλον.

Εικόνα 21: Σωστή απάντηση στην ερώτηση 2β.iv (φύλλο 2β)



iv. Εξέτασε αν αληθεύει η παρακάτω πρόταση: «Κάθε τετραγωνικός αριθμός είναι άθροισμα δύο διαδοχικών τριγωνικών αριθμών».

Η τρίτη ενότητα του φύλλου εργασίας 2β περιλάμβανε δραστηριότητες που ανήκουν στην κατηγορία των μαθηματικών σπαζοκεφαλιών. Λαμβάνοντας υπόψη τον παιγνιώδη χαρακτήρα των δραστηριοτήτων και με αφορμή αναφορά του βιβλίου ζητήθηκε ο σχηματισμός των αριθμών από το μηδέν έως το δέκα από πέντε δυάρια ή από τέσσερα τριάρια χρησιμοποιώντας πράξεις και τεχνικές όπως και ο ήρωας του βιβλίου, ο οποίος σχημάτισε τους αριθμούς της πρώτης δεκάδας με τέσσερα τεσσάρια. Υπήρξε πληθώρα διαφορετικών προτάσεων και λύσεων (Εικόνα 21) και ταυτόχρονα ένα κλίμα αποφόρτισης της ατμόσφαιρας εξαιτίας του χαρακτήρα της δραστηριότητας.

Εικόνα 22: Σχηματισμός αριθμών από τέσσερα τριάρια (φύλλο 2β)

3α. Στο κεφάλαιο 7 ο Μπέρεμιζ σχηματίζει τους δέκα πρώτους αριθμούς χρησιμοποιώντας 4 τεσσάρια.. Με τον ίδιο τρόπο σχηματίζουμε και αριθμούς πάνω από το 10. Έκτός όμως από αυτόν το συνδυασμό οι δέκα πρώτοι αριθμοί μπορούν να σχηματιστούν από 5 δυάρια ή από 4 τριάρια. Με έναν απ' αυτούς τους συνδυασμούς σχημάτισε τους αριθμούς από το 0 μέχρι το 10.

0: $33-33$

1: $\frac{33}{33}$

2: $\frac{3}{3}+\frac{3}{3}$

3: $\frac{3+3+3}{3}$

4: $\frac{(3\times 3)+3}{3}$

5: $\frac{3+3}{3}+3$

6: $3+3+3-3$

7: $3+3+\frac{3}{3}$

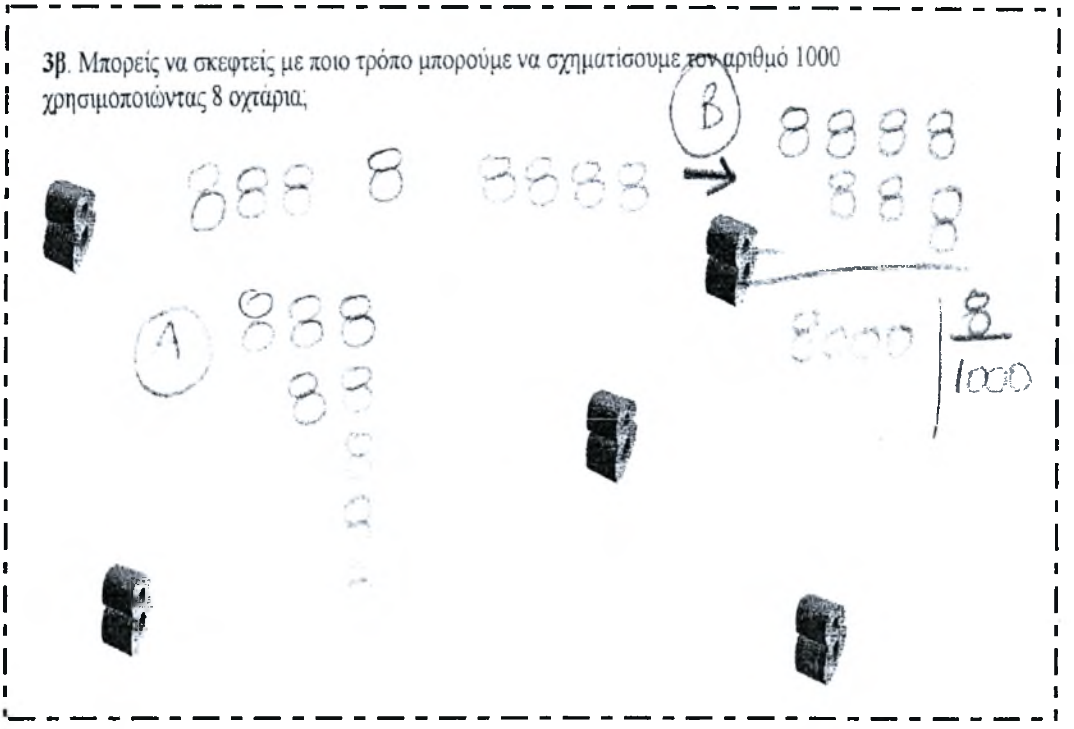
8: $3+3+3-\frac{3}{3}$

9: $\frac{3\times 3\times 3}{3}$

10: $\frac{33-3}{3}$

Το ίδιο συνέβη και με τον σχηματισμό του αριθμού 1000 με οκτώ οχτάρια. Σε αυτήν την δραστηριότητα υπήρξε μία περίπτωση που δε βρέθηκε λύση, ενώ δύο φοιτήτριες διατύπωσαν δύο διαφορετικές λύσεις που κατέληγαν στο σωστό αποτέλεσμα (Εικόνα 23).

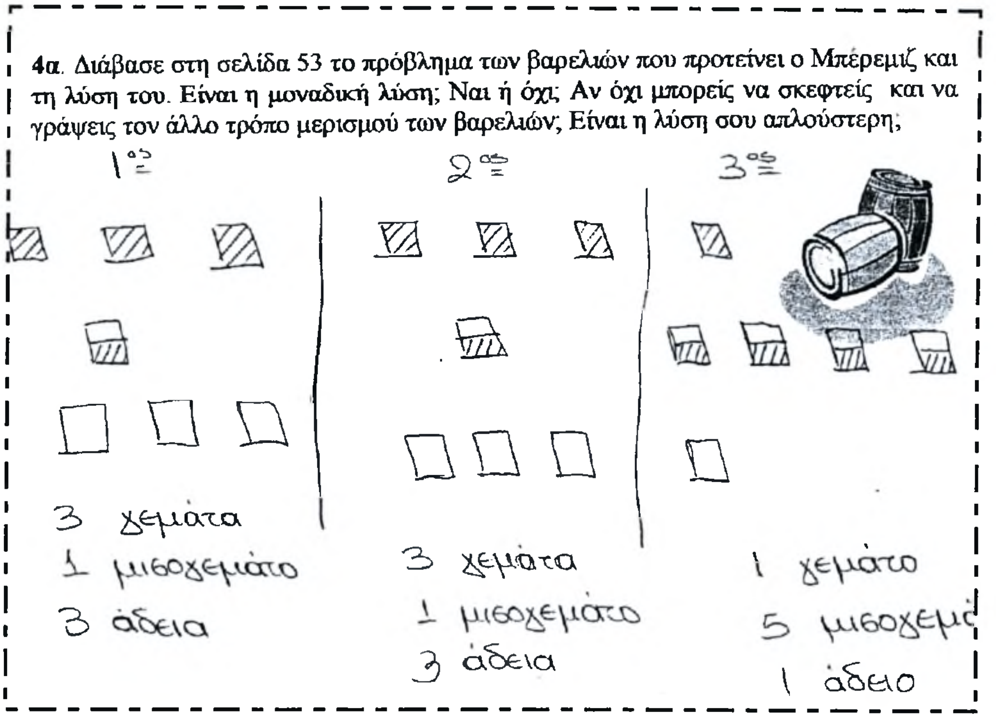
Εικόνα 23: Τα οχτώ οχτάρια (φύλλο 2β)



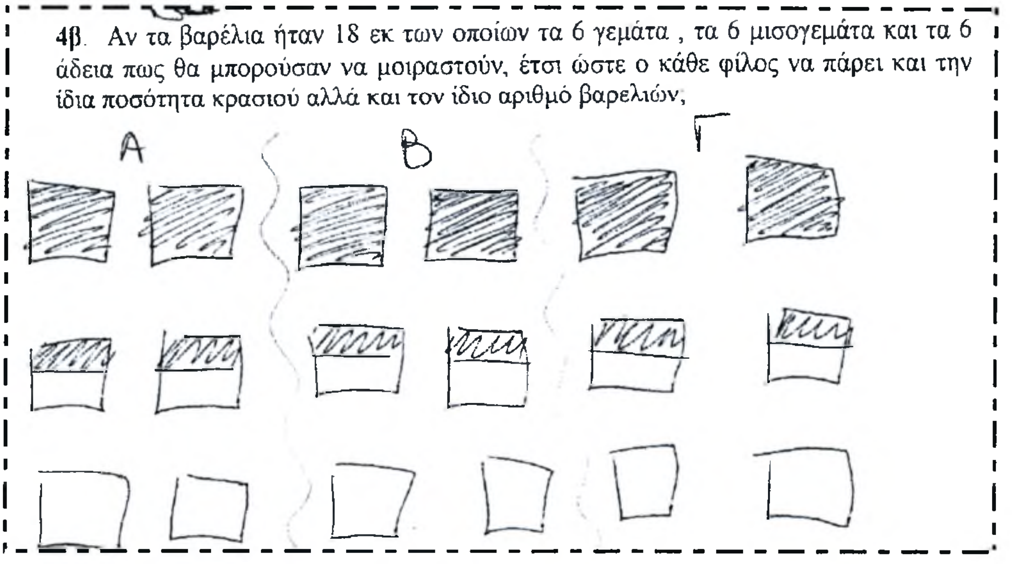
Η τελευταία ενότητα δραστηριοτήτων για τη δεύτερη διδακτική παρέμβαση χρησιμοποίησε τη λύση ενός προβλήματος μερισμού βαρελιών από τον «άνθρωπο που μετρούσε». Γνωρίζοντας ότι η λύση αυτή δεν είναι η μοναδική ζητήθηκε η διατύπωση της εναλλακτικής λύσης. Όλες οι προσπάθειες επίλυσης έγιναν με σχηματικό τρόπο (Εικόνα 24). Αυτό όμως δεν αποτέλεσε έκπληξη. Εξάλλου η λύση στο αρχικό πρόβλημα που περιγραφόταν στο βιβλίο γινόταν με παρόμοιο τρόπο. Έξι από τις επτά φοιτήτριες κατέληξαν στο ίδιο σωστό αποτέλεσμα.

Σωστές απαντήσεις δόθηκαν και στην επόμενη δραστηριότητα όπου παρουσιαζόταν το ίδιο πρόβλημα με διαφορετικά δεδομένα και ζητούνταν ο μερισμός των βαρελιών (Εικόνα 25).

Εικόνα 24: Σωστή απάντηση στην ερώτηση 4α (φύλλο 2β)



Εικόνα 25: Σωστή απάντηση στην ερώτηση 4β (φύλλο 2β)



Από την ανάλυση των απαντήσεων στα φύλλα εργασίας $2^{α}$ και 2β, την απομαγνητοφώνηση και τις καταγραφές των επεισοδίων αλληλεπίδρασης ενισχύθηκαν οι αρχικές μας διαπιστώσεις, όπως καταγράφηκαν ήδη στη συζήτηση της πρώτης διδακτικής παρέμβασης, για τη συσχέτιση των δυσκολιών, του απαιτούμενου χρόνου και του είδους των απαντήσεων με το έτος σπουδών και την λυκειακή κατεύθυνση. Επιπλέον, όπως διαπιστώθηκε από την πραγμάτευση των θεμάτων του φύλλου πολιτισμικής πλαισίωσης 2α, θέματα ιστορίας των μαθηματικών μπορούν να λειτουργήσουν ως κίνητρο για τη μάθηση εφόσον ανταποκρίνονται στα ενδιαφέροντα και στις ανησυχίες των συμμετεχόντων. Η χρονική διάρκεια της συζήτησης του φύλλου 2α, η οποία ξεπέρασε κατά πολύ την προβλεπόμενη από τον σχεδιασμό της παρέμβασης διάρκεια, καθώς και η ενεργή συμμετοχή στη συζήτηση και η επίμονη αναζήτηση απαντήσεων, αποτελούν στοιχεία που επιβεβαιώνουν την παραπάνω διαπίστωση. Τέλος, το γεγονός ότι καμία φοιτήτρια δεν εγκατέλειψε μέχρι το τέλος, ακόμη κι όταν η διδακτική παρέμβαση ξεπέρασε τον προβλεπόμενο χρόνο των δύο διδακτικών ωρών και τέθηκε από τη μεριά μας ζήτημα άλλων υποχρεώσεων και αποχώρησης, είναι ενδεικτικό του ενδιαφέροντος που παρουσίασαν για τις συμμετέχουσες οι δραστηριότητες του φύλλου μαθηματικού περιεχομένου 2β, ενδιαφέρον που παρέμεινε έντονο μέχρι το τέλος της διδακτικής παρέμβασης.

6.1.4 Η 3η διδακτική παρέμβαση

Στην τρίτη διδακτική παρέμβαση συμμετείχαν επτά φοιτήτριες. Η συνάντηση ξεκίνησε με τη συζήτηση του φύλλου πολιτισμικής πλαισίωσης 3α και πιο συγκεκριμένα με την περιληπτική απόδοση των κεφαλαίων του βιβλίου που προβλεπόταν από το φύλλο αυτό. Η ζωή και το έργο του Πυθαγόρα καθώς και η σχολή των Πυθαγόρειων αποτέλεσαν στη συνέχεια το αντικείμενο, γύρω από το οποίο περιστράφηκε η συζήτηση. Τα δύο ερωτήματα του φύλλου εργασίας 3α διατυπώνονταν ως εξής:

> ***2α.*** *Στο ενδέκατο κεφάλαιο γίνεται για δεύτερη φορά αναφορά στον Πυθαγόρα, ιδρυτή της σχολής των Πυθαγορείων, η οποία κατέχει ιδιαίτερα σημαίνουσα θέση ανάμεσα στους Προσωκρατικούς φιλοσόφους σε σχέση με αυτό που σήμερα αποκαλούμε Φιλοσοφία των Μαθηματικών. Γράψε λίγα λόγια για τη ζωή του Πυθαγόρα και τον χαρακτήρα της σχολής του. Πόσο έγκυρη ιστορική γνώση έχουμε γι αυτά; (Μέχρι 300 λέξεις)*
> ***2β.*** *Ποια είναι η σημασία της τετρακτύος για τους πυθαγόρειους;*

Σε δύο περιπτώσεις γραπτών απαντήσεων αναφέρονταν λεπτομέρειες για τη ζωή του Πυθαγόρα, πολλές φορές επουσιώδεις, σε βάρος σημαντικών γεγονότων και στοιχείων. Έτσι, κρίθηκε κάποιες φορές αναγκαία η παρέμβαση του ερευνητή για την οργάνωση και καθοδήγηση της συζήτησης. Στα παρακάτω αποσπάσματα των απαντήσεων δύο φοιτητριών, οι πληροφορίες που αναφέρονται δεν προσφέρουν στη συζήτηση και αξιοποίηση σημαντικών γεγονότων της ζωής του Πυθαγόρα.

> *«Γεννήθηκε το 580 π.Χ. στη Σάμο και πέθανε το 490 π.Χ. στο Μεταπόντιον της Κάτω Ιταλίας. Μεγάλωσε στη Σάμο και είχε*

πιθανότατα δάσκαλο τον Αναξίμανδρο. Θα ταξιδέψει αναζητώντας τη σοφία στην Περσία, στην Κρήτη και στην Αίγυπτο, όπου και θα παραμείνει για μεγάλο χρονικό διάστημα. Στα σαράντα του χρόνια επιστρέφει στη Σάμο και βρίσκει την πατρίδα του υπό την κατοχή του τυράννου Πολυκράτη και φεύγει πάλι, για την Ιταλία αυτή τη φορά».

και

«...Ο Πυθαγόρας πραγματοποιούσε ταξίδια στην Αίγυπτο, στην Κρήτη, και στην Περσία. Υπήρξε μαθητής του Φελεκύδη στη Λέσβο και του Αναξιμάνδρου και του Θαλή στη Μιλητό. Θα έπρεπε να άνηκε στην αριστοκρατική τάξη, η οποία εναντιώθηκε στην τυραννίδα του Πολυκράτη και έτσι αναγκάστηκε να εκπατριστεί στην Σικελία, στη Σύβαρη, στον Ταράντα και τελικά στον Κρότωνα της Κάτω Ιταλίας (γύρω στο 525 π. Χ)»

Ο προβληματισμός μας σε αυτήν την περίπτωση είχε να κάνει με το κατά πόσο η ερώτηση ήταν ασαφής και μπορούσε με αυτόν τον τρόπο να οδηγήσει σε παρανοήσεις και παρερμηνείες. Το γεγονός όμως, ότι υπήρξαν περιπτώσεις ολοκληρωμένων και περιεκτικών απαντήσεων, μας οδηγεί στο συμπέρασμα -όπως αυτό διατυπώθηκε ήδη κατά τη συζήτηση του φύλλου 1α- πως η επιλογή των πληροφοριών, η οποία γινόταν με τη μέθοδο της επικόλλησης-αντιγραφής χωρίς περαιτέρω επεξεργασία των πληροφοριών αυτών, ήταν ο λόγος που οδηγούσε σε τέτοιου είδους απαντήσεις. Ωστόσο, αυτό που έχει σημασία για την έρευνα είναι ότι, εκτός των δύο αυτών περιπτώσεων, οι απαντήσεις των υπόλοιπων φοιτητριών παρουσιάστηκαν βελτιωμένες σε σχέση με τα προηγούμενα φύλλα πολιτισμικής πλαισίωσης. Αυτό σημαίνει ότι για τις περισσότερες συμμετέχουσες η ενασχόληση και η εξοικείωση με τις ερωτήσεις σε συνδυασμό με την εσωτερική ανάγκη για γνώση που διεγείρεται από το ενδιαφέρον το οποίο μπορεί αυτές οι ερωτήσεις να προκαλέσουν, οδηγεί σε παραγωγή βελτιωμένων κειμένων σε σχέση με τη δομή και το περιεχόμενο.

Στη συνέχεια με αφορμή τις ερωτήσεις 3α και 3β συζητήθηκαν θέματα σχετικά με τη ζωή και το έργο του Ευκλείδη με έμφαση στο 5^{ο} αίτημα ή «αίτημα της παραλληλίας».

3α. *Για δεύτερη φορά επίσης στο κεφάλαιο 14 μνημονεύεται ο Ευκλείδης ως ένας από τους δημιουργούς του λαμπρού οικοδομήματος των Μαθηματικών. Το έργο του αποτέλεσε τη βάση πάνω στην οποία αναπτύχθηκαν τα μαθηματικά και ενέπνευσε πολλούς μεταγενέστερους μαθηματικούς. Γράψε λίγα λόγια για τη ζωή και το έργο του μεγάλου αυτού γεωμέτρη Ποια μέθοδο εισήγε στα Μαθηματικά; Ποιο είναι το περίφημο 5ο* *αίτημα ή αλλιώς «αξίωμα της παραλληλίας»; Γιατί είναι περίφημο; (Μέχρι 300 λέξεις).*

3β. Η Γεωμετρία του Ευκλείδη αποτέλεσε το θεμέλιο για την ανάπτυξη της «δυτικής» επιστήμης και τεχνικής και σ' αυτή τη Γεωμετρία στηρίζονται οι προϋποθέσεις της κλασικής Φυσικής από την Αναγέννηση και μετά. Τον 19ο αιώνα όμως η μοναδικότητα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας "υπονομεύτηκε". Ποιοι μαθηματικοί και πώς μπόρεσαν να αμφισβητήσουν την κυριαρχία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας;

Ένας από τους στόχους αυτής της δραστηριότητας ήταν να προβληματιστούν οι συμμετέχουσες και να οδηγηθούν η αναζήτηση απαντήσεων σχετικά με την κυριαρχία και την μετέπειτα αμφισβήτηση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Στις γραπτές απαντήσεις των φύλλων εργασίας δινόταν απαντήσεις και στα δύο σκέλη της ερώτησης.(Εικόνα 26, 27).

Εικόνα 26: Απάντηση στην ερώτηση 3β (φύλλο 3α)

Τον 19ο αιώνα διαπιστώθηκε (Λάμπερτ, Γκάους, Μπολυάι, Λομπατσέφσκι κ.ά.) ότι η ευκλείδεια Γεωμετρία στηρίζεται στην απλοϊκή αντίληψη του επίπεδου χώρου, ο οποίος είναι μεν χρήσιμος για την περιοχή που αντιλαμβάνεται με τις αισθήσεις του ένας άνθρωπος, αλλά όχι για πολύ μεγάλες τιμές των φυσικών μεγεθών (αποστάσεις, ταχύτητες, μάζες κτλ.) Τότε παύει να ισχύει η επίπεδη αντίληψη και μαζί της η ευκλείδεια Γεωμετρία, επειδή στην πραγματικότητα ο χώρος είναι κυρτός. Έτσι η Γεωμετρία συμπληρώνεται με βάση αντιλήψεις που στηρίζονται στον υπερβολικό, ελλειπτικό κ.ά. χώρο. το 19ο αιώνα ότι δεν μπορούν να επιτευχθούν με αυτήν τη μέθοδο. Συγκεκριμένα, το περίφημο αξίωμα της παραλληλίας, ή αλλιώς "πέμπτο αίτημα του Ευκλείδη", στάθηκε η αφορμή να ανακαλυφθούν οι λεγόμενες μη ευκλείδειες γεωμετρίες από τον Ντάβιντ Χίλμπερτ και τον Νικολάι Λομπατσέφσκι.

Πηγή: http://www.focusmag.gr/articles/view-article.rx?oid=97725

Στην περίπτωση της προφορικής επεξήγησης προέκυψαν δυσκολίες και σύγχυση απόψεων. Διαπιστώθηκε έτσι ότι η κατανόηση ήταν επιφανειακή, αφενός λόγω της σχετικής δυσκολίας του θέματος, αφετέρου λόγω έλλειψης προηγούμενων σχετικών γνώσεων. Το ενδιαφέρον κατά τη διάρκεια της συζήτησης για τις μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες ήταν έντονο και εκδηλώθηκε με καταιγισμό ερωτήσεων για τα είδη αλλά και για τις εφαρμογές τους. Με παραδείγματα από τον μικρόκοσμο και τον μακρόκοσμο καταλήξαμε στην παρουσίαση της υπόθεσης του Einstein η οποία επαληθεύτηκε κατά την ολική έκλειψη του ηλίου το 1919[15].

[15] Κατά τη διάρκεια της ολικής έκλειψης ηλίου το 1919 τα τηλεσκόπια εντόπισαν αστέρα η θέση του οποίου βρισκόταν πίσω από τον ήλιο σε σχέση με τη θέση της γης. Το γεγονός αυτό αποτέλεσε την πρώτη απόδειξη της γενικής θεωρίας της σχετικότητας και πιο συγκεκριμένα της υπόθεσης ότι το

Εικόνα 27 :Απάντηση στην ερώτηση 3β (φύλλο 3α)

Μερικοί από τους μαθηματικούς που αμφισβήτησαν την κυριαρχία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας :

- Ο Γκάους ήταν ο πρώτος που αμφισβήτησε την απόλυτη ταύτιση του Ευκλείδη με τη φύση και τη σκέψη. Ο αρχαίος αυτός Έλληνας είχε για πρώτη φορά ορίσει τη συστηματική γεωμετρία, χαρακτηρίζοντας αξιώματα ορισμένες βασικές απόψεις που αποτελούσαν το σημείο εκκίνησης ενός ολόκληρου συστήματος, το οποίο στηριζόταν απλά στην κοινή λογική. Κλασικό παράδειγμα, το αξίωμα ότι δυο παράλληλοι δεν τέμνονται, επομένως από ένα σημείο μπορεί να χαραχτεί μόνο μία ευθεία, παράλληλη προς άλλη δεδομένη. Ο Γκάους ήταν ο πρώτος μαθηματικός που αμφισβήτησε το ευκλείδειο θεώρημα της παραλληλίας, τονίζοντας ότι κάθε απόδειξη εμπεριέχει σφάλματα. Σύντομα υιοθέτησε την επαναστατική άποψη ότι υπάρχει μια άλλη γεωμετρία, η οποία είναι εσωτερικά συνεπής και ελεύθερη από αντιλογίες.

- Ο Riemann μπόρεσε να ξεφύγει από τα στενά πλαίσια της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και να αποδείξει ότι υπάρχει και μια άλλη Γεωμετρία εξίσου αληθινή, όπου ο χώρος είναι καμπύλος. Σε αυτόν το γεωμετρικό χώρο αλλάζει τελείως το 5ο Αξίωμα του Ευκλείδη.
  Το 5ο Αξίωμα του Ευκλείδη λέει ότι:
  «Αν θεωρήσουμε μια ευθεία και ένα σημείο έξω από την ευθεία, τότε από αυτό το σημείο διέρχεται μια μοναδική ευθεία, παράλληλη προς την πρώτη ευθεία.».
  Στη νέα Γεωμετρία του Riemann «από ένα σημείο έξω από μια ευθεία δε διέρχεται καμία παράλληλη προς την ευθεία». Σε αυτήν τη σφαιρική Γεωμετρία όλες οι ευθείες συναντώνται κάπου.

http://209.85.135.104/search?q=cache:ujA5Loo9fOMJ:www.thalesandfriends.org/gr/images/marina/paranoia/gauss.doc+%CE%B1%CE%BE%CE%AF%CF%89%CE%BC%CE%B1+%CF%84%CE%B7%CF%82+%CF%80%CE%B1%CE%81%CF%B1%CF%BB%CE%BB%CE%B7%CE%BB%CE%AF%CE%B1%CF%82&hl=e

Το επόμενο ερώτημα τέθηκε με αφορμή την άποψη του ήρωα του βιβλίου για τη σχέση των κλάδων των μαθηματικών μεταξύ τους:

4. *Μερικοί έχουν την εντύπωση ότι μέσα στο μαθηματικό οικοδόμημα η Αριθμητική, η Άλγεβρα και η Γεωμετρία αποτελούν εντελώς διακεκριμένους κλάδους. Αυτό είναι σοβαρό λάθος. Όλες συνεργάζονται, η μία βοηθά την άλλη, και σε μερικές περιπτώσεις μάλιστα εναλλάσσονται.* (σελ.75)

i. *Σε ποιο ακριβώς πρόβλημα αναφέρεται ο Μπέρεμιζ;*
ii. *Ονόμασε άλλους κλάδους των Μαθηματικών. Προσπάθησε να εξηγήσεις με τι ασχολείται ο καθένας.*
iii. *Γιατί δεν αναφέρεται σ' αυτούς τους κλάδους ο ήρωάς μας;*

Στην περίπτωση της αναζήτησης και καταγραφής των διαφόρων κλάδων των μαθηματικών η διαπραγμάτευση έγινε εύκολα, λόγω της πληροφοριακής φύσης και του εγκυκλοπαιδικού χαρακτήρα της ερώτησης. Στο ερώτημα 4.iii εκτός της λακωνικής απάντησης «*επειδή δεν υπήρχαν τότε*», δύο φοιτήτριες, όπως φαίνεται στην Εικόνα 28, προσπάθησαν να εμβαθύνουν περισσότερο.

αστρικό φως έπρεπε να καμπυλώνεται υπό την επίδραση της βαρύτητας, που ασκούν τα μεγάλα ουράνια σώματα, όπως ο ήλιος.

Εικόνα 28: Απάντηση στην ερώτηση 4.iii (φύλλο 3α)

iii. Γιατί δεν αναφέρεται σ' αυτούς τους κλάδους ο ήρωάς μας;

Την εποχή που ζει ο Μπέρεμιζ, η επιστήμη των Μαθηματικών δεν έχει φτάσει στο σημείο που βρίσκεται σήμερα. Ως τότε οι ανάγκες του εμπορίου και η τάση των ανθρώπων να μελετήσουν το χώρο και τα άστρα οδήγησε στην ανάπτυξη των πρώτων κλάδων, που είναι η Αριθμητική, η Άλγεβρα και η Γεωμετρία. Όσα απασχολούν τους υπόλοιπους γνωστούς σήμερα κλάδους των Μαθηματικών, έχουν μελετηθεί πολύ αργότερα στο χρόνο (17° και κυρίως 19° αιώνα).

Οι γραπτές απαντήσεις του φύλλου εργασίας 3α κινήθηκαν σε ικανοποιητικά επίπεδα. Επισημάνθηκε και σε αυτή την περίπτωση το φαινόμενο της περιττής πληροφορίας και η ανάγκη αξιολόγησης και επεξεργασίας της πληροφορίας καθώς επίσης και η ανάπτυξη κριτικής σκέψης στην επιλογή του υλικού το οποίο προέρχονταν από την αναζήτηση πηγών.

Στο δεύτερο μέρος της συνάντησης αξιοποιήθηκε το φύλλο μαθηματικού περιεχομένου 3β. Η δραστηριότητα για τα μετρικά συστήματα, τους λόγους καθιέρωσής τους και τις μονάδες τους χρησιμοποιήθηκε με πρόσχημα ένα απόσπασμα από το βιβλίο της διδακτικής παρέμβασης. Η ερώτηση διατυπώθηκε ως εξής:

1.

«Από τους αριθμούς, που συνιστούν τη βάση όλης της σκέψης και της κατανόησης, προκύπτει μια άλλη έννοια αναμφισβήτητης σημασίας: η έννοια της "μέτρησης"...Μετρώ σημαίνει συγκρίνω. Ωστόσο μόνο όσα πράγματα έχουν κάποιο συγκρίσιμο στοιχείο μπορούν υποβληθούν σε μέτρηση...».(σελ. 74)

Για την εξυπηρέτηση των αναγκών μέτρησης του ανθρώπου έχουν καθιερωθεί διεθνώς τα μετρικά συστήματα και οι μονάδες μέτρησης τους.

i. *Ποιοι λόγοι πιστεύεις ότι κατέστησαν αναγκαία την ύπαρξη τέτοιων συστημάτων;*

ii. *Ανέφερε τα μετρικά συστήματα που γνωρίζεις;*

iii. *Ποιες είναι οι μονάδες μέτρησης των συστημάτων που ανέφερες;*

Παρά την υποτιθέμενη ευκολία της δραστηριότητας, λαμβάνοντας υπόψη την καθημερινή επαφή με τέτοια συστήματα υπήρξαν δύο περιπτώσεις λανθασμένων απαντήσεων (Εικόνα 29) από φοιτήτριες της θεωρητικής κατεύθυνσης. Για τις υπόλοιπες φοιτήτριες δεν προέκυψε κάποια δυσκολία στην επεξεργασία και απάντηση των ερωτημάτων αυτής της δραστηριότητας.

Εικόνα 29 : Λανθασμένες απαντήσεις για τα μετρικά συστήματα (φύλλο 3β)

ii. Ανέφερε τα μετρικά συστήματα που γνωρίζεις;

Ζυγαριά, αριθμομηχανή
βαρίδια,

iii. Ποιες είναι οι μονάδες μέτρησης των συστημάτων που ανέφερες;

1, 2, 3 . . . .

Στη δεύτερη ενότητα δραστηριοτήτων με αφορμή ένα πρόβλημα του βιβλίου (Εικόνα 30) και τη λύση που προτείνει ο «άνθρωπος που μετρούσε», επαναδιατυπώθηκε το πρόβλημα, έτσι ώστε να γίνει αντιληπτό το λάθος το οποίο αρχικά οδηγούσε σε αντιφατικές λύσεις.

Με βάση την προβληματική κατάσταση όπως αυτή περιγράφεται στην Εικόνα 30 τέθηκαν τα παρακάτω ερωτήματα:

2. Στο πρόβλημα των πεπονιών που δίνει λύση ο Μπέρεμιζ στο κεφάλαιο 12 το "λάθος" ξεκινάει από τον αρχικό συλλογισμό του εμπόρου ότι η μέση τιμή των πέντε πεπονιών είναι 2 δηνάρια.. Αυτή η μέση τιμή όμως θα ίσχυε, μόνο αν στο τελικό σύνολο συμμετείχε ίσος αριθμός πεπονιών από κάθε ομάδα. Αποφασίζει λοιπόν να τα πουλήσει σε εξάδες δηλαδή τρία από τη μία ομάδα και τρία από την άλλη.

i. *Υπολόγισε με μαθηματικό τρόπο πόσο θα έπρεπε να πουλάει τώρα την εξάδα.*

ii. *Έλεγξε αν με την καινούρια τιμή θα εισέπραττε το σωστό ποσό από την πώληση όλων των πεπονιών.*

iii. *Λαμβάνοντας ίσο αριθμό πεπονιών από κάθε ομάδα, πώς αλλιώς θα μπορούσε να ομαδοποιήσει τα πεπόνια ο έμπορος, ώστε να μην περισσεύει στο τέλος κανένα πεπόνι από τα εξήντα που έχει; Πρότεινε τουλάχιστον άλλους δύο διαφορετικούς τρόπους.*

Εικόνα 30: Το πρόβλημα των πεπονιών

Ο Μπέρεμιζ άκουσε με προσοχή ένα από τους εμπόρους να διατυπώνει το πρόβλημα: «Τα δύο αδέλφια, ο Χαρίμ και ο Χαμίντ, μου έφεραν δύο φορτία πεπόνια για να τα πουλήσω στην αγορά. Ο Χαρίμ μού έφερε 30 πεπόνια να τα πουλήσω προς 1 δηνάριο τα τρία, και ο Χαμίντ μού έφερε επίσης 30 πεπόνια να τα πουλήσω σε ακριβότερη τιμή, προς 1 δηνάριο τα δύο. Λογικά λοιπόν, μετά την πώληση των πεπονιών, ο Χαρίμ έπρεπε να πάρει 10 δηνάρια και ο αδελφός του 15. Συνολικά δηλαδή 25 δηνάρια.

»Αργότερα, όταν έφτασα στην αγορά, κάποιες σκέψεις άρχισαν να μου τριβελίζουν το μυαλό. Αν άρχιζα να πουλώ τα ακριβότερα πεπόνια, θα έχανα τους πελάτες μου. Εάν πάλι άρχιζα να πουλώ τα φτηνότερα, σκέφτηκα ότι μετά θα δυσκολευόμουν να πουλήσω τα υπόλοιπα τριάντα που θα ήταν πιο ακριβά. Τελικά αποφάσισα να πουλήσω και τα δύο φορτία ταυτόχρονα.

»Παίρνοντας αυτή την απόφαση, ανακάτεψα τα πεπόνια και άρχισα να τα πουλώ όλα προς 2 δηνάρια τα πέντε. Ο συλλογισμός μού φάνηκε σωστός: αντί να πουλήσω προς 1 δηνάριο τα τρία και μετά προς 1 δηνάριο τα δύο, ήταν ευκολότερο να πουλήσω προς 2 δηνάρια τα πέντε.

»Αφού πούλησα 60 πεπόνια, σε 12 πεντάδες, εισέπραξα 24 δηνάρια. Πώς όμως θα πληρώσω και τους δύο αδελφούς, αφού ο ένας πρέπει να πάρει 10 δηνάρια και ο άλλος 15; Λείπει ένα δηνάριο. Δεν μπορώ να εξηγήσω πώς παρουσιάστηκε αυτή η διαφορά, από τη στιγμή που, όπως είπα, όλη η δουλειά έγινε με μεγάλη προσοχή. Δεν είναι άραγε το ίδιο, αντί να πουλάει κανείς προς 1 δηνάριο τα τρία και προς 1 δηνάριο τα δύο να πουλάει προς 2 δηνάρια τα πέντε πεπόνια;»

Παρότι το ενδιαφέρον για την επίλυση του προβλήματος παρέμενε έντονο, η δυσκολία στην κατανόηση του προβλήματος και των δεδομένων του οδήγησε σε παρέμβαση και σταδιακή καθοδήγηση της ομάδας από τον ερευνητή. Παρά τη βοήθεια που δόθηκε, οι δυσκολίες κατανόησης παρέμειναν για αρκετές φοιτήτριες μέχρι το τέλος. Οι σωστές λύσεις που δόθηκαν ήταν περισσότερο μηχανικές και δεν προήλθαν ως αποτέλεσμα βαθύτερης κατανόησης και επεξεργασίας. Στην Εικόνα 31 η προσπάθεια επίλυσης καταλήγει σε λανθασμένη απάντηση παρόμοια με αυτήν που περιγράφεται στο βιβλίο της διδακτικής παρέμβασης.

Εικόνα 31: Λανθασμένη απάντηση στα ερωτήματα 2.i και 2.ii (φύλλο 3β)

2. Στο πρόβλημα των πεπονιών που δίνει λύση ο Μπέρεμιζ στο κεφάλαιο 12 το "λάθος" ξεκινάει από τον αρχικό συλλογισμό του εμπόρου ότι η μέση τιμή των πέντε πεπονιών είναι 2 δηνάρια.. Αυτή η μέση τιμή όμως θα ίσχυε, μόνο αν στο τελικό σύνολο συμμετείχε ίσος αριθμός πεπονιών από κάθε ομάδα. Αποφασίζει λοιπόν να τα πουλήσει σε εξάδες δηλαδή τρία από τη μία ομάδα και τρία από την άλλη.

i. Υπολόγισε με μαθηματικό τρόπο πόσο θα έπρεπε να πουλάει τώρα την εξάδα.

$\frac{60}{12}$ πεπόνια → 24 δην. Άρα για 5 πεπ. → 2
6 →

$5x = 12 \Rightarrow x = \frac{12}{5} \Rightarrow x = 2,4$ δηνάρια

~~Έπρεπε από κάθε εξάδα να βγάλει 12,5 δην.~~

12|5
20|2,4

ii. Έλεγξε αν με την καινούρια τιμή θα εισέπραττε το σωστό ποσό από την πώληση όλων των πεπονιών.

~~Για 12 πεντάδες 5 δηνάρια~~

$6 \times 2,4 = 14,4$ δηνάρια

2,4
×6
14,4

Η συζήτηση που ακολούθησε σε σχέση με τα δεδομένα του προβλήματος και τον τρόπο επίλυσής του, οδήγησε τελικά τις περισσότερες φοιτήτριες στη βαθύτερη κατανόηση της προβληματικής κατάστασης, όπως διαπιστώθηκε από τις απαντήσεις στο τρίτο υποερώτημα. Στην περίπτωση αυτή πέντε από τις επτά φοιτήτριες απάντησαν σωστά και σε σχετικά σύντομο χρονικό διάστημα (Εικόνα 32).

Εικόνα 32: Σωστή απάντηση στην ερώτηση 2iii (φύλλο 3β)

iii. Λαμβάνοντας ίσο αριθμό πεπονιών από κάθε ομάδα, πώς αλλιώς θα μπορούσε να ομαδοποιήσει τα πεπόνια ο έμπορος, ώστε να μην περισσεύει στο τέλος κανένα πεπόνι από τα εξήντα που έχει; Πρότεινε τουλάχιστον άλλους δύο διαφορετικούς τρόπους.

α' τρόπος: 5 πεπόνια από κάθε ομάδα
$(5\cdot\frac{1}{3} + 5\cdot\frac{1}{2} = \frac{5}{3} + \frac{5}{2} = \frac{10}{6} + \frac{15}{6} = \frac{25}{6} = 4+\frac{1}{6}$ δηνάρια τα 10 πεπ.)

β' τρόπος: 2 πεπόνια από κάθε ομάδα
$(2\cdot\frac{1}{3} + 2\cdot\frac{1}{2} = \frac{2}{3} + 1 = \frac{2}{3} + \frac{3}{3} = \frac{5}{3} = 1+\frac{2}{3}$ δηνάρια τα 4 πεπ.)

γ' τρόπος: 6 πεπόνια από κάθε ομάδα
$(6\cdot\frac{1}{3} + 6\cdot\frac{1}{2} = 2 + 3 = 5$ δηνάρια τα 12 πεπόνια)

δ' τρόπος: 10 πεπόνια από κάθε ομάδα
$(10\cdot\frac{1}{3} + 10\cdot\frac{1}{2} = \frac{10}{3} + 5 = \frac{10}{3} + \frac{15}{3} = \frac{25}{3} = 8+\frac{1}{3}$ δηνάρια τα 20 πεπόνια)

ε' τρόπος: 15 πεπόνια από

Στη συνέχεια αντικείμενο πραγμάτευσης αποτέλεσαν οι τέλειοι αριθμοί. Από τον ορισμό και τον εντοπισμό τέλειων αριθμών η προσπάθεια επικεντρώθηκε στην εύρεση τέτοιων αριθμών με βάση ένα θεώρημα του ενάτου βιβλίου των «Στοιχείων» του Ευκλείδη από το οποίο προκύπτει ότι, αν ο $2^{\nu}-1$ είναι πρώτος αριθμός τότε ο $2^{\nu-1}(2^{\nu}-1)$ είναι τέλειος αριθμός. Το είδος της δραστηριότητας που αφορούσε την εφαρμογή της γνώσης και την επέκταση της σε παρόμοιες καταστάσεις, οδήγησε στη γρήγορη και σωστή απάντηση από έξι φοιτήτριες (Εικόνα 33). Υπήρξε ωστόσο μία περίπτωση όπου δεν υπήρξε καμία προσπάθεια επίλυσης.

Εικόνα 33: Σωστή απάντηση στην ερώτηση 3β (φύλλο 3β)

3β. Οι τέλειοι αριθμοί ήταν γνωστοί στους πυθαγόρειους. Αποδίδεται στον Πυθαγόρα η συσχέτιση της τελειότητας με τις δυνάμεις του 2. Αιώνες αργότερα ο Ευκλείδης το διατύπωσε πιο σωστά. Μέσα από ένα θεώρημα του ένατου βιβλίου των στοιχείων του προκύπτει ότι αν ο $2^{\nu}-1$ είναι πρώτος αριθμός τότε ο $2^{\nu-1}(2^{\nu}-1)$ είναι τέλειος αριθμός. Ακολουθώντας το θεώρημα του Ευκλείδη βρες τους τέσσερις πρώτους ~~αριθμούς~~ τέλειους.

Οι τέσσερις πρώτοι αριθμοί είναι 2, 3, 5 & 7.

α' πρώτος αρ $2 \neq 2^{\nu}-1 \Leftrightarrow 1 = 2^{\nu} \Leftrightarrow \nu = 0$

Άρα α' τέλειος αρ. $= 2^{0-1}(2^{0}-1) = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0$.

$\nu=0 \to 2^{0}-1=0$

$\nu=1 \to 2^{1}-1=1$

$\nu=2 \to 2^{2}-1=3$ → πρώτος αρ. → τέλειος αρ. $2^{2-1}(2^{2}-1) = 2(4-1) = 6$

$\nu=3 \to 2^{3}-1=7$ → πρώτος αρ. → τέλειος αρ. $2^{3-1}(2^{3}-1) = 4 \cdot 7 = 28$.

$\nu=4 \to 2^{4}-1=15$ δεν είναι πρώτος

$\nu=5 \to 2^{5}-1=31$ → πρώτος αρ. → τέλειος αρ $2^{5-1}(2^{5}-1) = 16 \cdot 31 = 496$.

$\nu=6 \to 2^{6}-1=63$ δεν είναι πρώτος

$\nu=7 \to 2^{7}-1=127$ → πρώτος αρ → τέλειος αρ $2^{7-1}(2^{7}-1) = 64 \cdot 127 = 8.12$[illegible]

Ο αριθμός ***π*** με βάση την ιστορική του εξέλιξη, όπως αυτή παρουσιάζεται στις σελίδες του βιβλίου, αποτέλεσε το αντικείμενο διαπραγμάτευσης στην τελευταία ενότητα δραστηριοτήτων του φύλλου εργασίας 3β. Με αφορμή συγκεκριμένο απόσπασμα του βιβλίου, όπου φωτογραφίζεται αλλά δεν ονομάζεται αυτός ο αριθμός, προέκυψε ο συμβολική του αναπαράσταση, η σχέση του με την περιφέρεια και τη διάμετρο του κύκλου όπως επίσης και το ότι αυτός ο αριθμός είναι άρρητος.

4. *«Είναι αδύνατο να υπολογίσουμε ακριβώς την περιφέρεια ενός κύκλου ακόμα κι αν γνωρίζουμε τη διάμετρο. Μπορούμε να βρούμε μια κοντινή τιμή, αλλά η ακριβής τιμή παραμένει άγνωστη στους γεωμέτρες... Ο ακριβής αυτός αριθμός φαίνεται να περιβάλλεται από κάποιο μυστήριο, καθώς περιέχει ιδιότητες που μόνο ο Αλλάχ μπορεί να αποκαλύψει»* (σελ.104-105)

i. *Ποιο είναι το μυστήριο του αριθμού στον οποίο αναφέρεται ο Μπέρεμιζ στο παραπάνω κείμενο; Γιατί «περιέχει ιδιότητες που μόνο ο Αλλάχ μπορεί να αποκαλύψει»;*

ii. *Ποιος αριθμός περιγράφει τη σχέση περιφέρειας κύκλου- διαμέτρου και πως συμβολίζεται; Τι γνωρίζεις γι' αυτόν τον αριθμό.*

iii. *Ποιος τύπος δίνει τη σχέση περιφέρειας κύκλου - διαμέτρου;*

iv. *Προκειμένου να κατασκευάσεις έναν κύκλο διαμέτρου 2 μέτρων με σκοινί, πόσο σκοινί* ***ακριβώς*** *θα πρέπει να έχεις στη διάθεσή σου; Αιτιολόγησε την απάντησή σου.*

v. *Ένα από τα διάσημα προβλήματα των αρχαίων ελληνικών μαθηματικών ήταν αυτό του τετραγωνισμού του κύκλου. Τι γνωρίζεις γι' αυτό το πρόβλημα; Γιατί δεν είναι δυνατή η λύση του με χρήση γνώμονα και διαβήτη;*

Σχετικά με το πρώτο ερώτημα, με την εξαίρεση μίας περίπτωσης όπου δεν υπήρξε απάντηση οι υπόλοιπες απαντήσεις μπορούν να συνοψιστούν από την απάντηση της Εικόνας 34.

Εικόνα 34: Απάντηση στην ερώτηση 4.i (φύλλο 3β)

i. Ποιο είναι το μυστήριο του αριθμού στο οποίο αναφέρεται ο Μπέρεμιζ στο παραπάνω κείμενο; Γιατί *«περιέχει ιδιότητες που μόνο ο Αλλάχ μπορεί να αποκαλύψει»;*

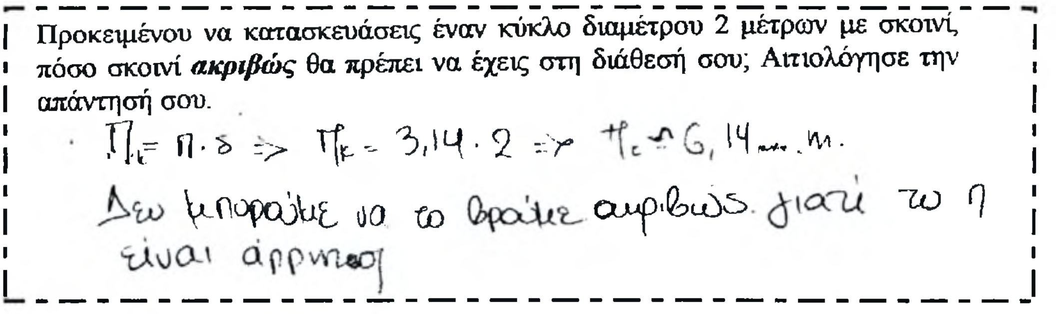
Ο συγκεκριμένος αριθμός προκύπτει σε [illegible] οποιονδήποτε κύκλο όταν διαιρέσουμε την περιφέρεια με τη διάμετρο του. Είναι αριθμός άρρητος.

Στην αναζήτηση της έννοιας του άρρητου αριθμού που ακολούθησε, η απάντηση της Δ. δεν άφησε πολλά περιθώρια συζήτησης:

«Άρρητος είναι ο αριθμός που δεν μπορεί να εκφραστεί ως λόγος δύο ακέραιων αριθμών».

Στις δύο επόμενες ερωτήσεις 4.ii και 4.iii οι απαντήσεις ήταν σωστές και σίγουρες. Το ίδιο συνέβη και με την ερώτηση 4.iv. Με την εξαίρεση μίας περίπτωσης όπου δεν καταγράφηκε απάντηση, οι υπόλοιπες απαντήσεις λάμβαναν υπόψη το γεγονός ότι ο αριθμός **π** είναι άρρητος. Έτσι προέκυπτε η αδυναμία ακριβούς υπολογισμού της περιφέρειας του κύκλου όπως φαίνεται στην Εικόνα 35.

Εικόνα 35: Σωστή απάντηση στην ερώτηση 4.iv (φύλλο 3β)


Προκειμένου να κατασκευάσεις έναν κύκλο διαμέτρου 2 μέτρων με σκοινί, πόσο σκοινί ***ακριβώς*** **θα πρέπει** να έχεις στη διάθεσή σου; Αιτιολόγησε την απάντησή σου.

$\Pi_\kappa = \pi \cdot \delta \Rightarrow \Pi_\kappa = 3{,}14 \cdot 2 \Rightarrow \Pi_\kappa \approx 6{,}14\ldots m.$

Δεν μπορούμε να το βρούμε ακριβώς. γιατί το π είναι άρρητος

Στην ανάδειξη της σημασίας της ιδιότητας αυτής στόχευε η τελευταία ερώτηση, η οποία ζητούσε αιτιολόγηση της αδυναμίας λύσης του αρχαίου προβλήματος του τετραγωνισμού του κύκλου με γνώμονα και διαβήτη. Όπως όμως διαπιστώθηκε, το πρόβλημα αυτό δεν ήταν γνωστό σε καμία από τις συμμετέχουσες. Δεν το είχαν ακούσει ή δε θυμόνταν να το έχουν ακούσει ως έκφραση. Εξαιτίας της άγνοιας του προβλήματος, η ερώτηση παρέμεινε αναπάντητη από το σύνολο των μελών της ομάδας.

Με βάση τις επιδόσεις και το γνωστικό υπόβαθρο των φοιτητριών θεωρήσαμε απίθανο να το έχουν ακούσει ή να το έχουν διαβάσει και να το ξέχασαν. Από μία σύντομη επισκόπηση των βιβλίων των μαθηματικών του Γυμνασίου και του Λυκείου που επιχειρήθηκε εντοπίσαμε: α) στο βιβλίο των Μαθηματικών της Β' Γυμνασίου ιστορικό σημείωμα[16] που αναφέρεται στο πρόβλημα υπολογισμού του **π** σε συνδυασμό το πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου και β) στο βιβλίο «Ευκλείδεια Γεωμετρία» για την Β' τάξη του Λυκείου υποκεφάλαιο[17] που αναφέρεται στον τετραγωνισμό του κύκλου, όπως επίσης και ιστορικό σημείωμα που αναφέρεται στα *«μη επιλύσιμα γεωμετρικά προβλήματα της αρχαιότητας»*. Ιδιαίτερη σημασία όμως έχει το γεγονός ότι το υποκεφάλαιο αυτό είναι «εκτός ύλης».

Επομένως αυτό που μάλλον συμβαίνει είναι ότι αφενός τέτοιου είδους προβλήματα δεν αξιοποιούνται διδακτικά, αν και θα μπορούσαν να αποτελέσουν χρήσιμα εργαλεία στα χέρια των μαθηματικών για την κατανόηση μαθηματικών εννοιών αλλά και για την ανάπτυξη της κριτικής σκέψης των μαθητών και αφετέρου από τη στιγμή

[16] Το συγκεκριμένο ιστορικό σημείωμα βρίσκεται στη σελίδα 189 του βιβλίου «Μαθηματικά Β' Γυμνασίου. Διαθέσιμο στο http ://pi-schools.sch.gr/gymnasio/math_b/math/161_200.pdf

[17] Το υποκεφάλαιο 11.8 έχει τίτλο «Τετραγωνισμός κύκλου»(σσ. 249-254). Διαθέσιμο στο: http://www.pi-schools.gr/lessons/mathematics/

που δεν προσφέρουν βαθμολογικά δεν τυγχάνουν της απαιτούμενης προσοχής από τη μεριά των εκπαιδευτικών και των μαθητών.

6.1.5 Η 4η διδακτική παρέμβαση

Στη συνάντηση για την τέταρτη διδακτική παρέμβαση συμμετείχαν έξι φοιτήτριες. Οι δύο απουσίες προήλθαν -όπως και στις προηγούμενες συναντήσεις- από την κατηγορία των φοιτητριών θεωρητικής κατεύθυνσης. Γνωρίζοντας τις επιπλέον δυσκολίες, σε σχέση με τα μαθηματικά, που αντιμετωπίζουν φοιτητές και φοιτήτριες αυτής της κατεύθυνσης υποθέσαμε, γεγονός που επαληθεύτηκε και στις επόμενες συναντήσεις, ότι οι φοιτήτριες αποχώρησαν από την ερευνητική διαδικασία.

Από την περιληπτική απόδοση των κεφαλαίων του βιβλίου της διδακτικής παρέμβασης που προβλέπονταν από το φύλλο πολιτισμικής πλαισίωσης 4α, το ενδιαφέρον εστιάστηκε στη συζήτηση των ερωτήσεων, η οποία ξεκίνησε με την ανάλυση των στοιχείων που συγκεντρώθηκαν για τη ζωή, το έργο και τη συνεισφορά του al-Khwarizmi στα μαθηματικά και στην αστρονομία. Με αφορμή την εικόνα ενός αγάλματος όπου ο μεγάλος αυτός μουσουλμάνος επιστήμονας εμφανίζεται να κρατάει στα χέρια του έναν αστρολάβο, η συζήτηση προχώρησε στην περιγραφή και στις ανάγκες που οδήγησαν στη ανακάλυψη και χρήση του, όπως επίσης και στην αναζήτηση των λόγων που δεν χρησιμοποιείται σήμερα. Σύμφωνα με την ερώτηση:

> ***2α.*** *Στη σελίδα 57 τα Μαθηματικά αποκαλούνται ως «η επιστήμη του Αλ Κβαρίσμι», ενώ στο κεφάλαιο 15 ο Άραβας μαθηματικός αναφέρεται άλλες δύο φορές. Είναι αυτός στον οποίο -μεταξύ άλλων- αφιερώνει το βιβλίο ο συγγραφέας αποκαλώντας τον «μεγάλο μουσουλμάνο φιλόσοφο, μαθηματικό και αστρονόμο». Ποιος ήταν ο Αλ Κβαρίσμι και ποια η συνεισφορά του στα Μαθηματικά; (Περίπου 200 λέξεις)*
> ***2β.*** *Στην παραπάνω εικόνα εμφανίζεται ο Αλ Κβαρίσμι να κρατάει έναν αστρολάβο. Τι είναι ο αστρολάβος; Ποιοι και γιατί τον χρησιμοποιούσαν; Ποιοι νομίζεις είναι οι λόγοι που δε χρησιμοποιείται σήμερα;*

Η επιλογή και η επεξεργασία των πληροφοριών σε σχέση με προηγούμενα φύλλα πολιτισμικής πλαισίωσης έγινε με πιο ώριμο τρόπο. Επίσης η δομή των απαντητικών κειμένων εμφάνισε σημάδια βελτίωσης όπως φαίνεται από την απάντηση της Σ.Μ.:

> *«Ο Αλ Κβαρίσμι ήταν Πέρσης ισλαμικός Μαθηματικός, αστρονόμος, γεωγράφος και αστρολόγος. Γεννήθηκε περίπου το 780 στο Khwārizm (νυν Khiva, Ουζμπέκισταν) και πέθανε περίπου το 850. Εργάστηκε για περισσότερο χρονικό διάστημα της*

ζωής του ως υπότροφος στο House of Wisdom στην Βαγδάτη.
Η άλγεβρα του ήταν το πρώτο βιβλίο για τη συστηματική λύση γραμμικών και τετραγωνικών εξισώσεων. Κατά συνεπεία αυτός θεωρείται ότι είναι ο πατέρας της άλγεβρας, έναν τίτλο που μοιράζεται με τον Διόφαντο. Λατινικές μεταφράσεις της αριθμητικής του, πάνω στους Ινδικούς αριθμούς, παρουσίασαν το δεκαδικό καθοριζόμενο αριθμητικό σύστημα για το στο δυτικό κόσμο κατά το 12ο αιώνα. Αναθεώρησε και εκσυγχρόνισε την γεωγραφία του Πτολεμαίου και έγραψε πολλές εργασίες για την αστρονομία και την αστρολογία.
Η προσφορά του είχε αντίκτυπο στα μαθηματικά, αλλά και στην γλωσσά. Η λέξη άλγεβρα προέρχεται από την al - jabr, μια από τις δυο πράξεις που χρησιμοποιούνται για την επίλυση τετραγωνικών εξισώσεων, όπως περιγράφεται στο βιβλίο του.
Χάρη στη μεγάλη συμβολή του , εφοδίασε με γερά θεμέλια τα μαθηματικά, την αστρονομία, την αστρολογία, την γεωγραφία και τη χαρτογραφία. Επιπλέον πρόσφερε εκτεταμένη καινοτομία στην άλγεβρα, τριγωνομετρία και του σε άλλους τομείς του ενδιαφέροντος του».

Στη συνέχεια και με αφορμή την επόμενη ερώτηση:

3.*Απαστάμπα, Αριαμπάτα, Μπραχμαγκούπτα, Μπασκάρα είναι ορισμένοι από τους Ινδούς μαθηματικούς που αναφέρονται στο κεφάλαιο 18.*

i. *Γράψε λίγα λόγια για το έργο και τη συνεισφορά των Ινδών μαθηματικών στα Μαθηματικά. (περίπου 200 λέξεις). Τι καινούριο εισήγαν στην έως τότε υπάρχουσα μαθηματική γνώση;*

ii. *Γιατί η γραφή των αριθμών που χρησιμοποιούμε σήμερα ονομάζεται αραβική ή ινδοαραβική και όχι ινδική;*

αναφέρθηκαν Ινδοί μαθηματικοί και στοιχειοθετήθηκε η μεγάλη συνεισφορά τους στα μαθηματικά: η θεμελιώδης ανακάλυψη του συστήματος δεκαδικής αρίθμησης, το οποίο βασίζεται στη χρήση εννιά διακριτών ψηφίων και του μηδενός (Εικόνα 36).

Στο δεύτερο υποερώτημα οι απαντήσεις, λόγω της φύσης του ερωτήματος, παρουσίασαν αξιοσημείωτη ομοιομορφία. Θα μπορούσαν εύκολα να συνοψιστούν από την απάντηση της Εικόνας 37.

Εικόνα 36: Απάντηση στην ερώτηση 3.i (φύλλο 4α)

Οι Ινδουιστές στην Ινδία δημιούργησαν ένα σύνολο από σύμβολα για τους αριθμούς, που το χρησιμοποιούμε ακόμη και σήμερα. Οι Ινδοί χρησιμοποίησαν κάποιους ειδικούς κανόνες οι οποίοι προϋπόθεταν ότι ο αριθμός γραφόταν με δεκαδική σημειογραφία, με την πρέπουσα σπουδαιότητα αποδιδόμενη στη θέση του μηδενός και της υποδιαστολής. Η χρήση του δεκαδικού συστήματος στάθηκε η προϋπόθεση όλων των προόδων που επακολούθησαν στα μαθηματικά. Αυτή η θεμελιώδης ανακάλυψη δόθηκε στον κόσμο από τους Ινδούς αλλά δεν είναι γνωστό ποια χρονολογία. Τέλος πιστεύεται ότι οι Ινδοί και κυρίως ο Αριαμπάτα γνώριζαν τον τρόπο επίλυσης απροσδιορίστων εξισώσεων β΄ βαθμού.

http://sapfo.env.gr/lykpeir/synergasies/SE%20%CE%99%CE%A3%CE%A4%CE%9F%CE%A1%CE%99%CE%91%20%CE%9A%CE%91%CE%99%20%CE%93%CE%A1%CE%91%CE%A6%CE%97%20%CE%A4%CE%A9%CE%9D%20%CE%91%CE%A1%CE%99%CE%98%CE%9C%CE%A9%CE%9D.html

Εικόνα 37: Απάντηση στην ερώτηση 3.ii (φύλλο 4α)

ii. Γιατί η γραφή των αριθμών που χρησιμοποιούμε σήμερα ονομάζεται αραβική ή ινδοαραβική και όχι ινδική;

Οι αριθμοί που χρησιμοποιούμε σήμερα προήλθαν από εκείνους που επινοήθηκαν κατά τον 6ο αιώνα από τον Ινδό αστρονόμο Αριαμπαχάτα. Η διάδοσή τους στον αραβικό κόσμο ανάγεται στο 771, όταν κάποιοι Ινδοί μαθηματικοί έφτασαν στη Βαγδάτη. Τον 9ο αιώνα έμποροι έφεραν στην Ευρώπη την αραβική μετάφραση ενός ινδικού χειρογράφου για τους αριθμούς. Αυτό υπήρξε η αφορμή των μετέπειτα παρεξηγήσεων. Όταν το κείμενο μεταφράστηκε στα λατινικά, τα νέα σύμβολα ονομάστηκαν "αραβικοί αριθμοί".

Οι "αραβικοί αριθμοί" άρχισαν να διαδίδονται στην Ευρώπη το 1200 μ.Χ. και η γραφή τους υπέστη πολλές τροποποιήσεις. Το 1299, στη Φλωρεντία, απαγορεύτηκε η χρήση τους κατά τις εμπορικές συναλλαγές επειδή ήταν εύκολη η παραποίησή τους (για παράδειγμα, το 0 εύκολα μετατρεπόταν σε 6). Η γραφιστική τους ποικιλομορφία συνεχίστηκε μέχρι το 1445, ημερομηνία επινόησης της τυπογραφίας. Σήμερα, οι αριθμοί που χρησιμοποιούνται στον αραβικό κόσμο μοιάζουν περισσότερο με τους αρχικούς ινδικούς αριθμούς.

Πηγή: http://www.focusmag.gr/articles/view-article.rx?oid=50823

Το επόμενο θέμα συζήτησης του φύλλου 4α αφορούσε τη ζωή και το έργο του Fibonacci, εστιάζοντας στην ομώνυμη ακολουθία, το πρόβλημα που οδήγησε στην ανακάλυψη της και τη σύνδεση της με τον αριθμό **φ** της χρυσής τομής[18]. Τα ερωτήματα αυτής της ενότητας δραστηριοτήτων διατυπώνονταν ως εξής:

[18] Ο λόγος δύο διαδοχικών αριθμών της ακολουθίας Fibonacci τείνει προς την αποκαλούμενη Χρυσή Τομή, ή Χρυσή αναλογία, ή Αριθμό φ =1.618033989

3. *Στο κεφάλαιο 19 γίνεται λόγος για αριθμούς που έχουν «μαγικές» ιδιότητες. Από τους πιο γνωστούς αριθμούς με τέτοιες ιδιότητες είναι οι αριθμοί της ακολουθίας Fibonacci, η οποία πήρε το όνομά της από τον μαθηματικό του Μεσαίωνα, ο οποίος πρώτος την περιέγραψε στο βιβλίο του Liber Abaci που εξέδωσε το 1202.*
   - i. *Ποιος ήταν ο Fibonacci και ποια η συνεισφορά του στα Μαθηματικά; (περίπου 200 λέξεις)*
   - ii. *Ποιο πρόβλημα οδήγησε τον Fibonacci στην ανακάλυψη της ομώνυμης ακολουθίας και πώς αυτή συνδέεται με τον αριθμό φ της χρυσής τομής; Σε ποια ιστορικά έργα τέχνης και αρχιτεκτονικής συναντούμε τον κανόνα της χρυσής τομής;*
   - iii. *«Οι αριθμοί Fibonacci αποτελούν το αριθμητικό σύστημα της φύσης.» Τι μπορεί να σημαίνει η παραπάνω πρόταση; Ποια είναι η δική σου άποψη; Με ποια επιχειρήματα μπορείς να την τεκμηριώσεις;*

Οι απαντήσεις στα δύο πρώτα ερωτήματα, ίσως λόγω του εγκυκλοπαιδικού χαρακτήρα των ερωτημάτων, δεν παρουσίασαν κάποια αξιοσημείωτη δυσκολία. Ωστόσο από την αναζήτηση πληροφοριών στο διαδίκτυο προέκυψε πληθώρα αναφορών για την ύπαρξη του κανόνα της χρυσής τομής σε έργα τέχνης και αρχιτεκτονικής (Εικόνα 38).

Εικόνα 38:Απάντηση στην ερώτηση 3.ii (φύλλο 4α)

ii. Ποιο πρόβλημα οδήγησε τον Fibonacci στην ανακάλυψη της ομώνυμης ακολουθίας και πώς αυτή συνδέεται με τον αριθμό φ της χρυσής τομής. Σε ποια ιστορικά έργα τέχνης και αρχιτεκτονικής συναντούμε τον κανόνα της χρυσής τομής;

Το πρόβλημα που οδήγησε στην ανακάλυψη της ακολουθίας του Φιμπονάτσι, βρίσκεται στο τρίτο μέρος του liber abaci και έχει ως εξής: Κάποιος τοποθέτησε σε έναν αποκλεισμένο τόπο ένα ζευγάρι κουνελιών. Τα κουνέλια αυτά αναπαράγονται με ρυθμό ένα νέο ζευγάρι το μήνα και κάθε νέο ζευγάρι γίνεται γόνιμο δύο μήνες μετά κι αναπαράγεται με τον ίδιο ρυθμό. Πόσα ζευγάρια κουνελιών έχουν παραχθεί σε έναν χρόνο απο το αρχικό ζεύγος; Το αποτέλεσμα είναι η σειρά των αριθμών: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, όπου κάθε νέος όρος προκύπτει από το άθροισμα των δύο προηγουμένων. Το πηλίκο δύο διαδοχικών αριθμών της ακολουθίας του Φιμπονάτσι τείνει στην χρυσή τομή φ. Συναντούμε τον κανόνα της χρυσής τομής: στον Παρθενώνα, στην πυραμίδα του Χέοπα, το Σινικό τείχος της Κίνας, στο θόλο του Αγίου Παύλου Λονδίνο, στο κάστρο του Windsor, στην Αφροδίτη της Μήλου, σε παράθυρα της Αναγέννησης και στη διακόσμηση των Ατζέκων. Χρησιμοποιήθηκε στην κατασκευή των βιολιών, των CD και των αυτοκινήτων. Και τέλος, αξιοποιήθηκε στη μόδα.

http://el.wikipedia.org/wiki/%CE%91%CE%BA%CE%BF%CE%BB%CE%BF%CF%85%CE%B8%CE%AF%CE%B1_%CE%A6%CE%B9%CE%BC%CF%80%CE%BF%CE%BD%CE%AC%CF%84%CF%83%CE%B9

http://users.sch.gr/theoj/etwin/fibonacci/xrisi.htm

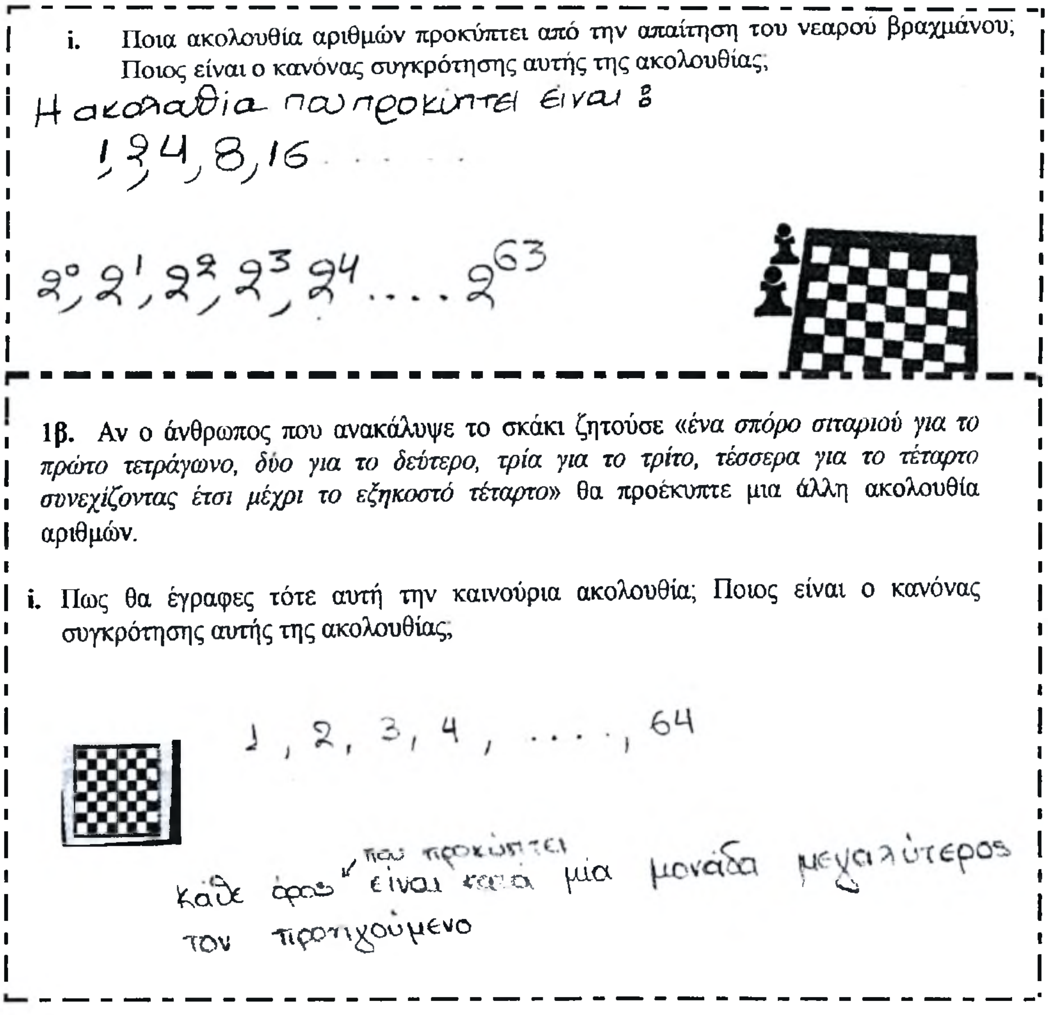
Από τα παραδείγματα της ύπαρξης της χρυσής τομής στην τέχνη αλλά και στη φύση, επιδιώχθηκε η ανάπτυξη επιχειρημάτων για το αν οι αριθμοί Fibonacci αποτελούν το αριθμητικό σύστημα της φύσης ή αποδίδονται σε αυτούς ιδιότητες με βάση την ανθρώπινη προθετικότητα και δραστηριότητα. Το απόσπασμα από τη γραπτή απάντηση στο παραπάνω ερώτημα από τη Δ. είναι ενδεικτικό του ενδιαφέροντος που αυτό είχε για τις φοιτήτριες και των δυνατοτήτων και των δεξιοτήτων που μπορούν να αναδειχθούν από τη διαπραγμάτευση τέτοιων θεμάτων :

> *«Η φύση, δηλαδή, προφανώς δεν προσπαθεί να χρησιμοποιήσει την ακολουθία Fibonacci. Απλά, αυτή εμφανίζεται ως το δευτερεύον αποτέλεσμα μιας πολύ βαθύτερης φυσικής διαδικασίας, Θεϊκής ίσως προέλευσης. Άλλωστε, α) οι μαθητές του μαθηματικού και φιλοσόφου Πυθαγόρα έφταναν στο σημείο να θεωρούν τη χρυσή αναλογία, θεόπνευστη, β) πέρα από τα επιστημονικά δεδομένα η χρυσή αναλογία, ο αριθμός φ, περιβάλλεται από ένα πέπλο μυστηρίου, κυρίως γιατί εντυπωσιακές προσεγγίσεις του απαντώνται, εντελώς απρόσμενα σε ένα σωρό μέρη στη φύση και γ) ο αριθμός αυτός τον οποίο η ακολουθία Fibonacci προσεγγίζει "περιέχει ιδιότητες που μόνο ο Αλλάχ μπορεί να αποκαλύψει"».*

Όπως διαπιστώθηκε, η φύση των θεμάτων από τον χώρο της ιστορίας και της φιλοσοφίας των μαθηματικών και η πιθανή σύνδεσή τους με προσωπικά ενδιαφέροντα ή προσωπικές αναζητήσεις μπορεί να λειτουργήσει ως κίνητρο για τη μάθηση και την ανάδειξη ικανοτήτων, δεξιοτήτων και ταλέντων που πολλές φορές περνάνε απαρατήρητα.

Το φύλλο μαθηματικού περιεχομένου 4β αποτέλεσε στη συνέχεια το αντικείμενο της διδακτικής παρέμβασης. Με αφορμή την εξιστόρηση από τον ήρωα του βιβλίου του γνωστού μύθου της προέλευσης του σκακιού, η πρώτη ενότητα δραστηριοτήτων αφορούσε τη γεωμετρική και την αριθμητική πρόοδο. Στις ερωτήσεις για την ονομασία, για τον κανόνα συγκρότησης της ακολουθίας των αριθμών στην αριθμητική και γεωμετρική πρόοδο (Εικόνα 39) και τη γραφική αναπαράσταση τους (Εικόνα 40) δεν παρατηρήθηκαν ιδιαίτερες δυσκολίες. Αντίθετα με την αρχική μας πρόβλεψη όλες οι απαντήσεις που δόθηκαν ήταν σωστές και μέσα στον καθορισμένο χρόνο.

Εικόνα 39: Κανόνας συγκρότησης αριθμητικής και γεωμετρικής ακολουθίας (φύλλο 4β)



i. Ποια ακολουθία αριθμών προκύπτει από την απαίτηση του νεαρού βραχμάνου; Ποιος είναι ο κανόνας συγκρότησης αυτής της ακολουθίας;

Η ακολουθία που προκύπτει είναι:
1, 2, 4, 8, 16 . . . .

$2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4 \dots 2^{63}$

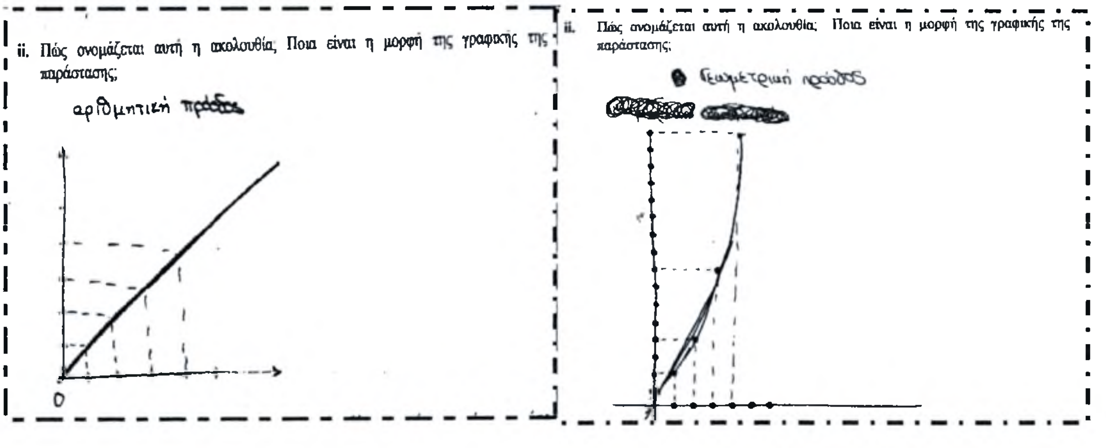
1β. Αν ο άνθρωπος που ανακάλυψε το σκάκι ζητούσε *«ένα σπόρο σιταριού για το πρώτο τετράγωνο, δύο για το δεύτερο, τρία για το τρίτο, τέσσερα για το τέταρτο συνεχίζοντας έτσι μέχρι το εξηκοστό τέταρτο»* θα προέκυπτε μια άλλη ακολουθία αριθμών.

i. Πως θα έγραφες τότε αυτή την καινούρια ακολουθία; Ποιος είναι ο κανόνας συγκρότησης αυτής της ακολουθίας;

1, 2, 3, 4, . . . , 64

Κάθε όρος που προκύπτει είναι κατά μία μονάδα μεγαλύτερος τον προηγούμενο

Εικόνα 40 Γραφική αναπαράσταση αριθμητικής και γεωμετρικής προόδου (φύλλο 4β)



Η επόμενη δραστηριότητα απαιτούσε τη λύση ενός προβλήματος παρόμοιου με πρόβλημα που διατυπώνεται στο βιβλίο και λύνεται από τον «άνθρωπο που μετρούσε». Για να γίνει κατανοητό το πρόβλημα το παραθέτουμε αυτούσιο:

«Ζούσε κάποτε στη Δαμασκό ένας αλαζόνας χωρικός, που είχε τρεις κόρες. Μια μέρα, ο χωρικός είπε στον κατή -στο δικαστή- ότι οι κόρες του δεν ήταν μόνο έξυπνες αλλά και προικισμένες με σπάνιες δεξιότητες. Ο κατής, άνθρωπος ζηλιάρης και τσιγκούνης, ενοχλήθηκε ακούγοντας το χωρικό να μιλά με τέτοια περηφάνια για τα ταλέντα των θυγατέρων του. "Είναι η πέμπτη φορά που μου περιγράφεις με τόσο υπερβολικά λόγια πόσο έξυπνες είναι οι κόρες σου. Λοιπόν, προτίθεμαι να τις καλέσω στο σπίτι μου, ώστε να διαπιστώσω προσωπικά αν όντως είναι τόσο έξυπνες όσο ισχυρίζεσαι."

»Όταν έφεραν τα τρία κορίτσια μπροστά στον κατή, αυτός τους είπε: "Σας έχω φέρει 90 μήλα, για να τα πουλήσετε στην αγορά. Εσύ, Φατίμα, που είσαι η μεγαλύτερη, θα πάρεις 50, η Γκούντα θα πάρει 30, κι εσύ, Σία, ως νεότερη, θα πάρεις 10. Αν η Φατίμα πουλήσει τα μήλα προς 1 δηνάριο τα επτά, εσείς οι άλλες δύο πρέπει να πουλήσετε τα δικά σας με την ίδια τιμή. Αν πάλι η Φατίμα πουλήσει τα μήλα της προς 3 δηνάρια το ένα, πρέπει να κάνετε και εσείς το ίδιο. Ωστόσο πρέπει τελικά και οι τρεις να έχετε συγκεντρώσει -δεν με ενδιαφέρει πώς- το ίδιο ποσό χρημάτων."

»"Μπορώ να ξεφορτωθώ μερικά από τα δικά μου μήλα;" ρώτησε η Φατίμα.

»"Σε καμία περίπτωση" επέμεινε ο πονηρός κατής. "Αυτοί είναι οι κανόνες. Η Φατίμα πρέπει να πουλήσει 50 μήλα. η Γκούντα 30, και η Σία τα 10 που απομένουν. Και όλες πρέπει να πουλήσετε τα μήλα στην ίδια τιμή, και όλες σας πρέπει τελικά να έχετε το ίδιο κέρδος."

»Το πρόβλημα που αντιμετώπιζαν οι τρεις αδελφές ήταν παράλογο. Πώς θα μπορούσε να λυθεί; Ακόμη κι αν πουλούσαν και οι τρεις τα μήλα τους στην ίδια τιμή, η αξία των 50 μήλων θα υπερέβαινε κατά πολύ την αξία των 30 ή των 10 μήλων.

»Επειδή τα κορίτσια δεν ήξεραν πώς να αντιμετωπίσουν το πρόβλημα, επισκέφτηκαν έναν σοφό που ζούσε στην περιοχή τους. Αυτός, αφού γέμισε πολλές σελίδες με υπολογισμούς κατέληξε στα εξής:

»"Κορίτσια, η λύση είναι καθαρή σαν κρύσταλλο: Πουλήστε τα 90 μήλα όπως σας ζήτησε ο κατής, και θα έχει καθεμία σας το ίδιο κέρδος."

»Ο σοφός έδωσε στις τρεις αδελφές οδηγίες οι οποίες δεν φαίνονταν να λύνουν το πρόβλημα των 90 μήλων. Οι αδελφές όμως πήγαν στην αγορά και πούλησαν τα μήλα σύμφωνα με αυτές τις οδηγίες, και στο τέλος αποκόμισαν όλες τους το ίδιο κέρδος. Εδώ τελειώνει η ιστορία. Αφήνω λοιπόν στον υπολογιστή να εξηγήσει πώς ο σοφός έλυσε το πρόβλημα.»

Παρά το γεγονός ότι η επίδειξη των βημάτων και ο τρόπος επίλυσης του προβλήματος περιγράφονταν επαρκώς στο βιβλίο, παρουσιάστηκαν δυσκολίες και υπέρβαση των χρονικών ορίων που είχαν τεθεί. Η μοναδική εναπομείνασα φοιτήτρια θεωρητικής προέλευσης δεν κατόρθωσε να λύσει το πρόβλημα, ενώ οι υπόλοιπες απαντήσεις επαναλάμβαναν τη διαδικασία και τα βήματα επίλυσης που χρησιμοποίησε ο ήρωας του βιβλίου. Αξιοσημείωτη είναι η μοναδική περίπτωση, η οποία δεν ακολουθεί την τυποποίηση και καταλήγει σε αλγεβρική λύση του προβλήματος (Εικόνα 41).

Εικόνα 41: Σωστή απάντηση στην ερώτηση 2 (φύλλο 4β)

2. Στις σελίδες 121-123 του κεφαλαίου 17 περιγράφεται το πρόβλημα της πώλησης των μήλων και παρουσιάζεται η λύση που πρότεινε ο Μπέρεμιζ. Ένα παρόμοιο πρόβλημα είναι και το παρακάτω:
«Τρεις κοπέλες μοιράζονται 135 μήλα. Η πρώτη παίρνει 65, η δεύτερη 50 και η τρίτη 20. Πρέπει να τα πουλήσουν έτσι ώστε για κάθε οκτώ μήλα να πληρώνονται ένα δηνάριο, ενώ τα υπόλοιπα πρέπει να τα πουλήσουν στην ίδια τιμή που θα πουλήσει η πρώτη.»
Περιέγραψε τον τρόπο με τον οποίο πρέπει να πουληθούν τα μήλα ώστε η κάθε κοπέλα να εισπράξει το ίδιο ποσό δηναρίων;

Α: $8+8+8+8+8+8+8+8+1$ (μήλα)
$\downarrow \ \downarrow \ \downarrow \ \downarrow \ \downarrow \ \downarrow \ \downarrow \ \downarrow \ \downarrow$
$1+1+1+1+1+1+1+1+x$ (δηνάρια)
$=8+x \overset{(1)}{\Rightarrow} 8+2=10$ δηνάρια

Β: $8+8+8+8+8+8+2$ (μήλα)
$\downarrow \ \downarrow \ \downarrow \ \downarrow \ \downarrow \ \downarrow \ \downarrow$
$1+1+1+1+1+1+2x$ (δηνάρια)
$=6+2x \overset{(1)}{\Rightarrow} 6+2\cdot 2=10$ δηνάρια

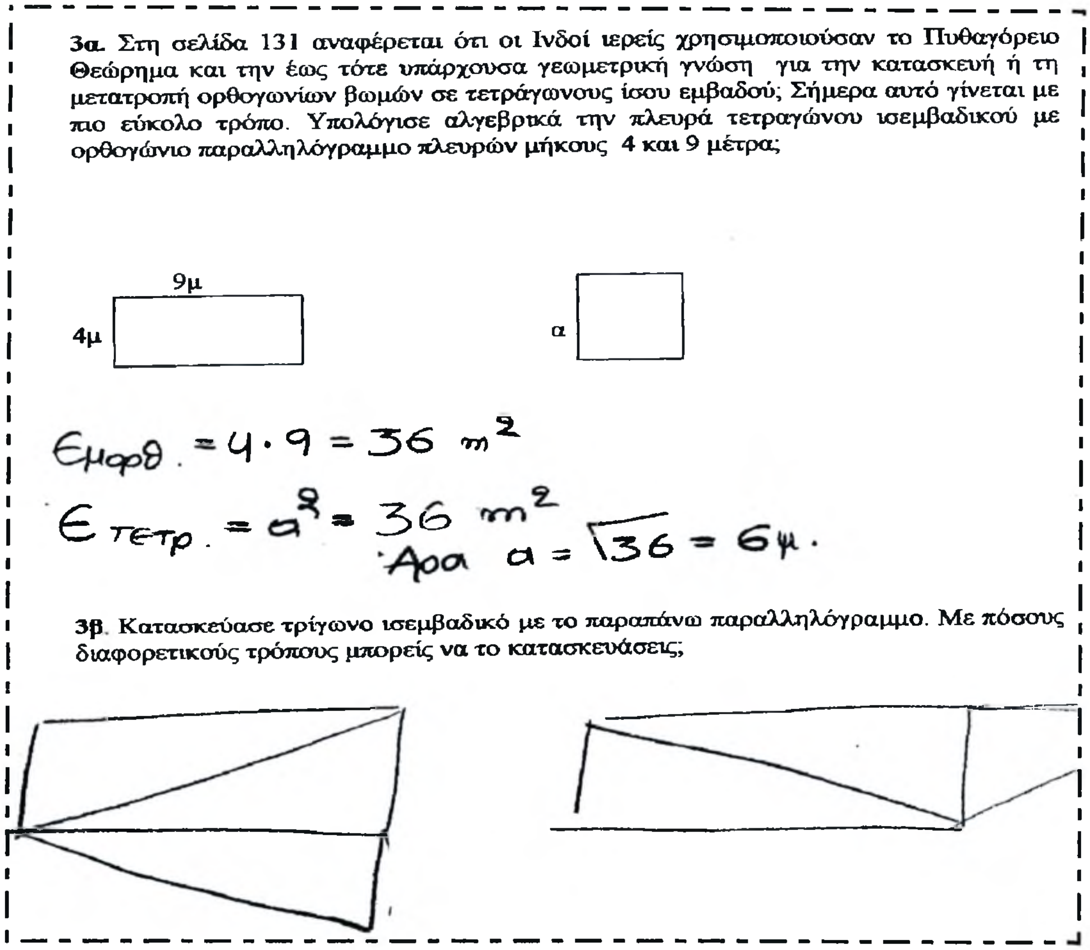
Γ: $8+8+4$ (μήλα)
$\downarrow \ \downarrow \ \downarrow$
$1+1+4x$ (δηνάρια)
$=2+4x \overset{(1)}{\Rightarrow} 2+4\cdot 2=10$ δηνάρια.

4

Θα πρέπει $8+x=6+2x=2+4x$
$8+x=2+4x \Leftrightarrow 6=3x \Leftrightarrow x=2$ (1)

Η κατασκευή τετράγωνου ή τρίγωνου ισεμβαδικού δοθέντος ορθογωνίου παραλληλόγραμμου δε παρουσίασε ιδιαίτερες δυσκολίες (Εικόνα 42).

Εικόνα 42: Απάντηση στις ερωτήσεις 3α και 3β (φύλλο 4β)



3α. Στη σελίδα 131 αναφέρεται ότι οι Ινδοί ιερείς χρησιμοποιούσαν το Πυθαγόρειο Θεώρημα και την έως τότε υπάρχουσα γεωμετρική γνώση για την κατασκευή ή τη μετατροπή ορθογωνίων βωμών σε τετράγωνους ίσου εμβαδού; Σήμερα αυτό γίνεται με πιο εύκολο τρόπο. Υπολόγισε αλγεβρικά την πλευρά τετραγώνου ισεμβαδικού με ορθογώνιο παραλληλόγραμμο πλευρών μήκους 4 και 9 μέτρα;

$E_{\mu o\rho\theta.} = 4 \cdot 9 = 36\ m^2$

$E_{\tau\varepsilon\tau\rho.} = \alpha^2 = 36\ m^2$

Άρα $\alpha = \sqrt{36} = 6\mu.$

3β. Κατασκεύασε τρίγωνο ισεμβαδικό με το παραπάνω παραλληλόγραμμο. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορείς να το κατασκευάσεις;

Εύκολα απαντήθηκε και η ερώτηση για την δυνατότητα κατασκευής κύκλου ισεμβαδικού με το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Η επιλογή της ερώτησης έγινε με αφορμή την άγνοια για την ύπαρξη του προβλήματος του τετραγωνισμού του κύκλου και τη συζήτηση που έλαβε χώρα κατά τη διάρκεια της προηγούμενης διδακτικής παρέμβασης. Σε αυτή την περίπτωση οι απαντήσεις δόθηκαν εύκολα και γρήγορα (Εικόνα 43). Στο γεγονός αυτό συντέλεσε προφανώς η συζήτηση σχετικά με τον τετραγωνισμό του κύκλου, η οποία είχε πραγματοποιηθεί κατά τη διάρκεια της προηγούμενης διδακτικής παρέμβασης.

Στο σημείο αυτό πρέπει να σταθούμε στο δεύτερο υποερώτημα για το πλήθος των διαφορετικών τρόπων κατασκευής ισεμβαδικού τριγώνου (Εικόνα 42). Σύμφωνα με την 35η και την 37η πρόταση του πρώτου βιβλίου των *Στοιχείων* του Ευκλείδη όλα τα παραλληλόγραμμα (αντίστοιχα, τρίγωνα), που ευρίσκονται μεταξύ δύο δοθεισών

Εικόνα 43: Απάντηση για την κατασκευή κύκλου (φύλλο 4β)

3γ. Μπορείς να κατασκευάσεις κύκλο ισεμβαδικό με το παραπάνω παραλληλόγραμμο; Αν όχι, γιατί νομίζεις ότι δε γίνεται αυτό; Ποιο ιστορικό πρόβλημα σου θυμίζει;

$E_{κυκ} = πρ^2$

Το εμβαδόν του κύκλου υπολογίζεται με τη βοήθεια του π, που είναι άρρητος αριθμός

- συσχετισμός με τον τετραγωνισμό του κύκλου

παραλλήλων γραμμών και με δοθείσα τη βάση τους στη μία από τις δύο παράλληλες, έχουν ίσο εμβαδόν. Στόχος μας ήταν από την κατασκευή ενός τριγώνου να καταλήξει η ομάδα σε συμπεράσματα για την ύπαρξη άπειρων κατασκευαστικών λύσεων. Από τις απαντήσεις και τις κατασκευές προέκυπτε όμως περιορισμένος αριθμός δυνατοτήτων κατασκευής. Η ύπαρξη δύο ή τριών τρόπων κατασκευής ήταν η πιο συνηθισμένη απάντηση. Από τη συζήτηση που ακολούθησε διαπιστώθηκε ότι η ύπαρξη άπειρων κατασκευαστικών δυνατοτήτων ήταν ήδη γνωστή στα μέλη της ομάδας.[19] Αυτό που μάλλον συνέβη ήταν ότι δεν μπόρεσαν να συνδέσουν την υπάρχουσα γνώση με το συγκεκριμένο ερώτημα. Ο τρόπος με τον οποίον διατυπώθηκε η ερώτηση δεν μπόρεσε να βοηθήσει στη σύνδεση της υπάρχουσας γνώσης με την προβληματική κατάσταση.

Με την τελευταία δραστηριότητα του φύλλου 4β αξιοποιήθηκε ένα απόσπασμα του βιβλίου το οποίο δανειζόταν ένα πρόβλημα από το έργο του Ινδού μαθηματικού Bhascara "*Lilavati*". Για τη λύση του προβλήματος απαιτούνταν η λύση μίας εξίσωσης πρώτου βαθμού. Πέντε φοιτήτριες (εύκολα ή δύσκολα) απάντησαν σωστά (Εικόνα 44) ενώ μία φοιτήτρια αν και προσπάθησε δεν κατέληξε στο σωστό αποτέλεσμα λόγω λάθους στην εκτέλεση των πράξεων.

[19] Το συγκεκριμένο θέμα διδάσκεται στο πλαίσιο υποχρεωτικού μαθήματος μαθηματικών του Παιδαγωγικού Τμήματος.

Εικόνα 44: Λύση εξίσωσης $1^{ου}$ βαθμού (φύλλο 4β)

4 Το πρόβλημα του προβλήματος με τις μέλισσες στη σελίδα 135 αφορά στην ουσία εξίσωση $1^{ου}$ βαθμού που περιέχει έναν άγνωστο (x). Γράψε την εξίσωση που προκύπτει από τα δεδομένα του προβλήματος. Ποιο αποτέλεσμα προκύπτει από τη λύση της; Συμφωνείς με την απάντηση που έδωσε ο Μπέρεμιζ;

$$\frac{1}{3}x + \frac{1}{5}x + 3\cdot\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right)x + 1 = x \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{3}x + \frac{1}{5}x + 3\cdot\frac{2}{15}x + 1 = x \Leftrightarrow$$

$$5x + 3x + 6x + 15 = 15x \Leftrightarrow$$

$$x = 15 \;.$$

Κατά τη διάρκεια της τέταρτης διδακτικής παρέμβασης διαπιστώθηκε ότι η χρήση επιλεγμένης θεματολογίας από την ιστορία των μαθηματικών με βάση τα ενδιαφέροντα και τις επιθυμίες των εκπαιδευομένων, μπορεί να επιφέρει θετικά αποτελέσματα στον τρόπο που αντιμετωπίζονται τα μαθηματικά και συνεπώς στη δημιουργία κατάλληλων συνθηκών για τη μάθησή τους. Όταν τα μαθηματικά δεν παρουσιάζονται ως ένα σύνολο συμβόλων, σχέσεων, τύπων και διαδικασιών αλλά ως προϊόν της ανθρώπινης δραστηριότητας οι επιπτώσεις στη δημιουργία ενός διαφορετικού κλίματος μάθησης και επομένως στη μείωση του άγχους για τον «άγνωστο» αυτό κόσμο είναι εμφανείς.

Απαιτείται όμως και ένα ελάχιστο γνώσεων πάνω στο οποίο θα οικοδομηθούν και θα στηριχθούν οι νέες γνώσεις. Η διαπίστωση αυτή προέκυψε από την προσπάθεια ερμηνείας των δύο οικειοθελών αποχωρήσεων των φοιτητριών που προέρχονταν από τη θεωρητική κατεύθυνση και ενισχύθηκε από την τρίτη και τελευταία αποχώρηση της τελευταίας φοιτήτριας αυτής της κατεύθυνσης από την επόμενη διδακτική παρέμβαση. Επομένως, για τον σχεδιασμό της έρευνας αυτό που έχει ιδιαίτερη σημασία είναι η ανίχνευση των γνώσεων των διδασκομένων πριν από το στάδιο των διδακτικών παρεμβάσεων.

6.1.6 Η $5^{η}$ διδακτική παρέμβαση

Στη συνάντηση για την πέμπτη διδακτική παρέμβαση έλαβαν μέρος πέντε φοιτήτριες. Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, οι τρεις οικειοθελείς αποχωρήσεις συνδέονται με το μαθηματικό γνωστικό υπόβαθρο και το έτος σπουδών. Η θεωρητική λυκειακή κατεύθυνση των φοιτητριών δημιουργούσε δυσκολίες και εμπόδια στη συμμετοχή με αποτέλεσμα την έλλειψη ενδιαφέροντος για το περιεχόμενο των διδακτικών παρεμβάσεων. Το έτος σπουδών επηρέαζε τον τρόπο αντιμετώπισης των μαθημάτων από τις φοιτήτριες που κινούνταν στη λογική του «έχουμε ακόμη χρόνο για το πτυχίο». Στην αναζήτηση των αιτίων για τον λόγο απουσίας αυτών των φοιτητριών χαρακτηριστική ήταν η απάντηση της Σ.Π.: «*Είναι σε μικρά έτη και δεν πιέζονται ακόμη*», συσχετίζοντας προφανώς τη συμμετοχή στην ερευνητική διαδικασία με την ανάγκη κατοχύρωσης του μαθήματος στο πλαίσιο του οποίου πραγματοποιήθηκε η έρευνα. Έτσι τέθηκε το θέμα του τρόπου με τον οποίο αντιμετώπιζαν τη συμμετοχή τους στην ερευνητική διαδικασία οι υπόλοιπες συμμετέχουσες. Όπως διαπιστώθηκε από τη συζήτηση, η συμμετοχή προέκυπτε ως αποτέλεσμα του προσωπικού ενδιαφέροντος και όχι εξαιτίας της ανάγκης απόκτησης του πτυχίου. Άλλωστε μόνο δύο από τις πέντε εναπομείνασες φοιτήτριες βρίσκονταν στο τελευταίο έτος των σπουδών τους. Επομένως, το κίνητρο για την παραμονή στην ερευνητική διαδικασία θα πρέπει να αναζητηθεί στον τρόπο προσέγγισης των μαθηματικών με την ενσωμάτωση της λογοτεχνίας και της ιστορίας των μαθηματικών στην εκπαιδευτική διαδικασία και το ενδιαφέρον το οποίο απέκτησε ο νέος (για τις συμμετέχουσες) αυτός τρόπος προσέγγισης των μαθηματικών.

Στο πρώτο μέρος της διδακτικής παρέμβασης συζητήθηκαν τα θέματα που το φύλλο πολιτισμικής πλαισίωσης 5α προέβλεπε. Από την ιστορική αναδρομή των συστημάτων αρίθμησης η συζήτηση εστιάστηκε στο δεκαδικό (ινδοαραβικό) σύστημα αρίθμησης, την αναζήτηση των αιτίων που οδήγησαν στην επικράτηση του έναντι των άλλων συστημάτων και την αιτιολόγηση του ψηφιακού και θεσιακού χαρακτήρα του. Σύμφωνα με αυτήν την ερώτηση:

> ***2α.*** *Στο κεφάλαιο 20 επιχειρείται μια ιστορική αναδρομή στα συστήματα αρίθμησης. Γράψε λίγα λόγια για την ιστορική εξέλιξη των συστημάτων αρίθμησης.(περίπου 200 λέξεις)*
> ***2β.*** *Στο ίδιο κεφάλαιο υποστηρίζεται η υπεροχή του ινδοαραβικού συστήματος (δηλαδή του θεσιακού με βάση το 10), έναντι των άλλων συστημάτων αρίθμησης. Ποιοι λόγοι νομίζεις, οδήγησαν στην επικράτηση του ινδοαραβικού συστήματος αρίθμησης έναντι των άλλων συστημάτων; Γιατί το ινδοαραβικό σύστημα χαρακτηρίζεται ψηφιακό και θεσιακό;*

Οι απαντήσεις στα δύο αυτά ερωτήματα ήταν σύντομες και περιεκτικές. Η επιλογή και η επεξεργασία των πληροφοριών έγινε σύμφωνα με τις παρατηρήσεις και τα σχόλια που διατυπώθηκαν στις προηγούμενες διδακτικές παρεμβάσεις. Στην Εικόνα

45 με λίγα λόγια αιτιολογείται ο ψηφιακός, ο θεσιακός και επιπλέον ο δεκαδικός χαρακτήρας του ινδοαραβικού συστήματος αρίθμησης.

Εικόνα 45: Απάντηση στην ερώτηση 2β (φύλλο 5α)

Το αριθμητικό σύστημα που χρησιμοποιούμε σήμερα είναι ψηφιακό, δεκαδικό, θεσιακό, με υποδιαστολή και μηδέν. *Ψηφιακό*, γιατί οι μονάδες του παριστάνονται με διαφορετικά σύμβολα και όχι επανάληψη του ίδιου συμβόλου, π.χ. το τρία έχει το δικό του σύμβολο (3), ενώ σε ένα μη ψηφιακό σύστημα θα συμβολιζόταν επαναλαμβάνοντας τρεις φορές το σύμβολο για το 1. Στο βαβυλωνιακό, το αιγυπτιακό, το ρωμαϊκό και πολλά άλλα αριθμητικά συστήματα της αρχαιότητας το τρία παριστάνεται ως III. *Δεκαδικό*, επειδή κάθε φορά που συμπληρώνονται δέκα μονάδες δημιουργείται μια μονάδα ανωτέρας τάξης. Οι αριθμοί από το 0 μέχρι το 9 είναι μονοψήφιοι. Ο αριθμός 10 γράφεται ως ένα και μηδέν δηλαδή μια μονάδα ανωτέρας τάξης (δεκάδα) και καμιά απλή μονάδα. Θεσιακό, γιατί η αξία του κάθε ψηφίου καθορίζεται από τη θέση του μέσα στον αριθμό. Έτσι στο 4737 από δεξιά προς τα αριστερά η αξία αυξάνεται. Όταν θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε υποδιαιρέσεις της μονάδας (δέκατα, εκατοστά, χιλιοστά, ...) τότε η υποδιαστολή μας δείχνει που σταματούν οι ακέραιες μονάδες και που αρχίζουν οι κλασματικές. Έτσι αυτό που μας επιτρέπει να διαφοροποιήσουμε το 31,2 από το 3,12 είναι η υποδιαστολή.

Το δεύτερο θέμα που αποτέλεσε αντικείμενο συζήτησης επιλέχθηκε με αφορμή ένα πρόβλημα μερισμού σε απειροστά μέρη, το οποίο περιγράφεται στο βιβλίο της διδακτικής παρέμβασης και στο οποίο «ο άνθρωπος που μετρούσε» έδωσε μία ανθρώπινη και όχι μαθηματική απάντηση.[20] Το ερώτημα διατυπώθηκε ως εξής:

> ***3.*** *Προβλήματα μερισμού ενός μεγέθους σε απειροστά μέρη όπως αυτό που παρουσιάζεται στο κεφάλαιο 22 εμφανίζονται από την αρχαιότητα. Πολύ γνωστό είναι το παράδοξο του Ζήνωνα του Ελεάτη με τον Αχιλλέα και τη χελώνα..*
>
> i. *Γράψε λίγα λόγια για τη ζωή του Ζήνωνα. Ποια ήταν τα βασικά σημεία της Ελεατικής φιλοσοφίας. (περίπου 200 λέξεις)*
>
> ii. *Περιέγραψε το παράδοξο του Ζήνωνα. Ποια άλλα παράδοξα διατύπωσε; Ανάφερε πολύ σύντομα ποια είναι αυτά. Πού βρίσκεται το παράδοξο;*

Η συζήτηση από τη ζωή και τη φιλοσοφία του Ζήνωνα του Ελεάτη και τα βασικά σημεία της ελεατικής φιλοσοφίας πέρασε στην περιγραφή και εξήγηση των παραδόξων που διατύπωσε ο Ζήνωνας. Από τα τέσσερα παράδοξα που αναφέρθηκαν, η συζήτηση εστιάστηκε στο παράδοξο του Αχιλλέα με τη χελώνα για το οποίο άλλωστε είχε προβλεφθεί μία επιπλέον δραστηριότητα στο φύλλο μαθηματικού περιεχομένου 5β.

[20] Το πρόβλημα προκύπτει όταν η ποινή φυλάκισης ενός λαθρέμπορου, ο οποίος αρχικά είχε καταδικαστεί σε ισόβια κάθειρξη, μειώνεται στο μισό. Η μαθηματική λύση, σύμφωνα με οποία ο λαθρέμπορος τη μία στιγμή πρέπει να είναι στη φυλακή και την άλλη ελεύθερος, είναι πρακτικά αδύνατη. Έτσι ο ήρωας του βιβλίου, ο Μπέρεμιζ, προτείνει την ανθρώπινη λύση: την υπό όρους απελευθέρωση του λαθρέμπορου.

Ο Διόφαντος και οι διοφαντικές εξισώσεις αποτέλεσαν το επόμενο αντικείμενο πραγμάτευσης.

3. Στο κεφάλαιο 24 συναντούμε για δεύτερη φορά το Διόφαντο, τον οποίο ο Μπέρεμιζ αποκαλεί «περίφημο Έλληνα μαθηματικό».

i. Γράψε λίγα λόγια για τη ζωή και το έργο του Διόφαντου του Αλεξανδρινού. (περίπου 200 λέξεις)

ii. Ποιες εξισώσεις ονομάζονται διοφαντικές;

Σε αυτό το σημείο να αναφερθεί ότι τόσο ο Διόφαντος, όσο και οι εξισώσεις του δεν υπήρχαν καν στο λεξιλόγιο των φοιτητριών μέχρι τη συμμετοχή στην ερευνητική διαδικασία. Μετά από την επίδειξη όμως μίας διοφαντικής εξίσωσης από τον εκπαιδευτικό-ερευνητή, όλες οι συμμετέχουσες παίρνοντας χαρτί και μολύβι προσπάθησαν να διατυπώσουν και να λύσουν μία παρόμοια εξίσωση. Η ευκολία με την οποία το κατάφεραν δημιούργησε αίσθημα ικανοποίησης, το οποίο άλλωστε αποτελεί και ζητούμενο της ερευνητικής διαδικασίας.

Στο τελευταίο μέρος της συζήτησης του φύλλου εργασίας 5α αναφέρθηκαν στοιχεία για τη ζωή και τον θάνατο του Αρχιμήδη, σημαντικές ανακαλύψεις του μεγάλου μαθηματικού, φυσικού και μηχανικού με έμφαση στην αρχή της άνωσης ή «αρχή του Αρχιμήδη». Όπως διαπιστώθηκε από τις παρεμβάσεις των φοιτητριών το θέμα παρουσίαζε ενδιαφέρον και τα περισσότερα στοιχεία ήταν ήδη γνωστά σε αυτές πριν από την επεξεργασία του φύλλου πολιτισμικής πλαισίωσης 5α.

Συνολικά από την επεξεργασία των φύλλων εργασίας 5α επιβεβαιώθηκαν οι διαπιστώσεις μας, όπως αυτές καταγράφηκαν στη συζήτηση προηγούμενων διδακτικών παρεμβάσεων σχετικά με την αναζήτηση των πηγών και την επιλογή και επεξεργασία των πληροφοριών. Πηγή της πληροφορίας δεν αποτελούσε πλέον μία ιστοσελίδα, ένα βιβλίο ή μία εγκυκλοπαίδεια. Υπήρξαν αρκετές περιπτώσεις τριών η τεσσάρων αναφορών για ένα θέμα. Η επεξεργασία και η επιλογή των κατάλληλων πληροφοριών εμφάνισε σημαντική βελτίωση. Το φαινόμενο των συρραφών ελαχιστοποιήθηκε και στην επιλογή των πληροφοριών εμφανίστηκε το κριτήριο της σημαντικότητας της πληροφορίας σε σχέση με το υπό διαπραγμάτευση θέμα. Έτσι οι αναφορές σε ανούσια, περιττά πληροφοριακά στοιχεία μειώθηκαν σημαντικά. Οι διαπιστώσεις αυτές ερμηνεύονται ως αποτέλεσμα του αυξημένου ενδιαφέροντος που είχαν οι δραστηριότητες αυτές για τις φοιτήτριες που συμμετείχαν στην ομάδα, όπως επίσης και λόγω της ευαισθητοποίησης τους σε προσεγγίσεις οι οποίες καταργούν τα διακριτά όρια των επιστημονικών κλάδων προσφέροντας πιο σφαιρική και ολόπλευρη θεώρηση της γνώσης

Στόχος της πρώτης ενότητας δραστηριοτήτων του φύλλου μαθηματικού περιεχομένου 5β ήταν να οδηγηθούν οι φοιτήτριες με τη βοήθεια επιλεγμένων ερωτήσεων (Εικόνες 46 και 47), στη διερεύνηση των λόγων που οδήγησαν στην επικράτηση του δεκαδικού ((ινδοαραβικού) συστήματος αρίθμησης.

Εικόνα 46: Απαντήσεις σε προβλήματα συστημάτων αρίθμησης (φύλλο 5β)

ii. Στην περίπτωση του δυαδικού συστήματος η βάση του συστήματος είναι το 2. Γράψε ως άθροισμα δυνάμεων του 2 τον αριθμό 1101. Σε ποιον αριθμό του δεκαδικού συστήματος αντιστοιχεί αυτό ο αριθμός; Σε ποιον αριθμό αντιστοιχεί το 100 του δυαδικού; Είναι το δυαδικό σύστημα θεσιακό

$1101 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$

Το άθροισμα είναι 8 $8 + 4 + 1 = 13$

Είναι θεσιακό

$100 = 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$

Άρα στο δεκαδικό το 100 είναι : 4

iii. Σε ποιους αριθμούς του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης αντιστοιχούν οι αριθμοί 23 και 122 του πενταδικού; Είναι το πενταδικό σύστημα θεσιακό,

$23 = 2 \cdot 5^1 + 3 \cdot 5^0$

Στο δεκαδικό είναι 13

είναι θεσιακό

$122 = 1 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^0$

Στο δεκαδικό είναι ο 37

1

Εικόνα 47: Απαντήσεις σε προβλήματα συστημάτων αρίθμησης (φύλλο 5β)

ii. Στην περίπτωση του δυαδικού συστήματος η βάση του συστήματος είναι το 2. Γράψε ως άθροισμα δυνάμεων του 2 τον αριθμό 1101. Σε ποιον αριθμό του δεκαδικού συστήματος αντιστοιχεί αυτό ο αριθμός; Σε ποιον αριθμό αντιστοιχεί το 100 του δυαδικού; Είναι το δυαδικό σύστημα θεσιακό

$\underline{1101} : 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 8 + 4 + 1 = 13$

$\underline{100} : 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 4$

Και το δυαδικό σύστημα είναι θεσιακό

iii. Σε ποιους αριθμούς του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης αντιστοιχούν οι αριθμοί 23 και 122 του πενταδικού; Είναι το πενταδικό σύστημα θεσιακό;

$\underline{23} : 2 \cdot 5^1 + 3 \cdot 5^0 = 10 + 3 = 13$

$\underline{122} : 1 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^0 = 25 + 10 + 2 = 37$

Και το πενταδικό σύστημα είναι θεσιακό

1

Η επικράτηση του δεκαδικού συστήματος σύμφωνα με τις απαντήσεις των φοιτητριών αποδίδεται σε πρακτικούς λόγους. Το μεγάλο πλήθος των ψηφίων των αριθμών που αναπαριστώνται σε αριθμητικά συστήματα εκτός του δεκαδικού, όπως επίσης και το πρόβλημα εκτέλεσης πράξεων μεταξύ τέτοιων αριθμών είναι οι λόγοι που οδήγησαν στην επικράτηση του δεκαδικού συστήματος (Εικόνα 47).

Εικόνα 48: Σύγκριση δυαδικού και δεκαδικού συστήματος (φύλλο 5β)

v. Παρά την επικράτηση όμως του δεκαδικού συστήματος, στην τεχνολογία ηλεκτρονικών υπολογιστών και πληροφορικών συστημάτων η χρήση του δυαδικού συστήματος θεωρείται εκ των ων ουκ άνευ. Γιατί ενώ στην τεχνολογία των Η/Υ η χρήση του δυαδικού συστήματος θεωρείται αναγκαία, στην καθημερινή ζωή στάθηκε ανέφικτη; Τι νομίζεις ότι θα συνέβαινε αν αποφασιζόταν η υιοθέτηση του δυαδικού συστήματος αρίθμησης στην καθημερινή μας ζωή;

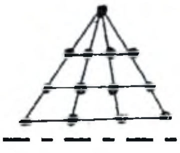
Στην τεχνολογία των Η/Υ χρειάζεται να παρασταθούν δύο καταστάσεις: περνάει ρεύμα και δεν περνάει ρεύμα. Τα δύο ψηφία του δυαδικού συστήματος είναι αρκετά γι' αυτές τις καταστάσεις 1 και 0 αντίστοιχα.
Αν υιοθετούσαμε το δυαδικό σύστημα στην καθημερινή μας ζωή οι αριθμοί που θα προέκυπταν θα ήταν δύσχρηστοι και μεγάλοι, συνεπώς δύσκριτοι. Ούτε πράξη

Στη συνέχεια, με αφορμή ένα πρόβλημα διάταξης όπως περιγράφεται στο βιβλίο της διδακτικής παρέμβασης, οι φοιτήτριες διατύπωσαν προβλήματα για σχήματα που είχαν δοθεί (Εικόνα 49). Διατύπωσαν επίσης ένα δικό τους πρόβλημα παρουσιάζοντας σχηματικά τη λύση του (Εικόνα 50). Κατά τη διάρκεια ενασχόλησης με τη συγκεκριμένη ενότητα δραστηριοτήτων, δεν παρατηρήθηκε κάποια ιδιαίτερη δυσκολία. Σωστές απαντήσεις δόθηκαν από όλες τις συμμετέχουσες και σε σύντομο χρονικό διάστημα.

Εικόνα 49: Σωστή απάντηση στην ερώτηση 2α (φύλλο 5β)

2α. Στη σελίδα 157 του κεφαλαίου 21 διατυπώνεται ένα πρόβλημα διάταξης και παρουσιάζεται σχηματικά η λύση του. Παρόμοια προβλήματα διάταξης υπάρχουν πολλά. Διατύπωσε για καθένα από τα παρακάτω σχήματα ένα πρόβλημα διάταξης.

Τοποθέτησε 7 στρατιώτες σε 5 σειρές κατά τρόπο ώστε κάθε σειρά να έχει τρεις στρατιώτες.



Τοποθέτησε 13 στρατιώτες σε 7 σειρές έτσι ώστε κάθε σειρά να έχει 4 στρατιώτες.

Εικόνα 50: Απάντηση σε πρόβλημα διάταξης (φύλλο 5β)

2β. Διατύπωσε ένα δικό σου πρόβλημα διάταξης, παρουσιάζοντας σχηματικά τη λύση του.

Τοποθέτησε οι στρατιώτες σε 8 σειρές
κατα τρόπο ώστε κάθε σειρα να έχει
3 στρατιώτες

Στην επόμενη ενότητα δραστηριοτήτων οι συμμετέχουσες ασχολήθηκαν με ένα πρόβλημα μερισμού ενός μεγέθους σε απειροστά μέρη. Σύμφωνα με το πρόβλημα:

> *«Ένας επιχειρηματίας σκέφτηκε το παρακάτω συνταξιοδοτικό πρόγραμμα για τους υπαλλήλους του: Τους είπε πως θα τους δώσει σύνταξη αμέσως μόλις ο καθένας τους εργασθεί για 8 καθαρές ώρες στο ταμείο της εταιρίας. Η μόνη προϋπόθεση που έθεσε ήταν ότι καθένας τους πρέπει να εργασθεί κάθε μέρα το μισό του χρόνου που του απομένει για να συμπληρώσει τις 8 αυτές ώρες. Σε πόσες ημέρες αυτός ο υπάλληλος θα μπορέσει να βγει στη σύνταξη;».*
>
> *i. Γράψε την ακολουθία που προκύπτει από το παραπάνω πρόβλημα. Ποιος είναι ο πρώτος όρος και ποιος ο λόγος της ακολουθίας; Πώς ονομάζεται αυτή η ακολουθία;*
>
> *ii. Τι θα συμβεί με τη συνταξιοδότηση των υπαλλήλων; Σύγκρινε το πρόβλημα αυτό με το παράδοξο του Ζήνωνα*

Εντοπίζοντας τον πρώτο όρο και τον λόγο της ακολουθίας των αριθμών του προβλήματος, κατέληξαν στη γεωμετρική πρόοδο με λόγο μικρότερο της μονάδας (Εικόνα 51).

Εικόνα 51: Σωστή απάντηση στην ερώτηση 3α.i (φύλλο 5β)

3α. Ένα παρόμοιο πρόβλημα με αυτό του φυλακισμένου στο κεφάλαιο 22 μπορεί να διατυπωθεί ως εξής: *«Ένας επιχειρηματίας σκέφτηκε το παρακάτω συνταξιοδοτικό πρόγραμμα για τους υπαλλήλους του: Τους είπε πως θα τους δώσει σύνταξη αμέσως μόλις ο καθένας τους εργασθεί για 8 καθαρές ώρες στο ταμείο της εταιρίας. Η μόνη προϋπόθεση που έθεσε ήταν ότι καθένας τους πρέπει να εργασθεί κάθε μέρα το μισό του χρόνου που του απομένει για να συμπληρώσει τις 8 αυτές ώρες. Σε πόσες ημέρες αυτός ο υπάλληλος θα μπορέσει να βγει στη σύνταξη;».*

i. Γράψε την ακολουθία που προκύπτει από το παραπάνω πρόβλημα. Ποιος είναι ο πρώτος όρος και ποιος ο λόγος της ακολουθίας, Πώς ονομάζεται αυτή η ακολουθία;

1η μέρα	2η	3η	4η	5η	6η	7η	8η
4h	2h	1h	30 min	15 min	7,5 min		

$4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}, \frac{1}{256},$

λόγος ακολουθίας $= \frac{1}{2}$

φθίνουσα γεωμετρική πρόοδος

Στη συνέχεια απαντήθηκε το δεύτερο υποερώτημα που απαιτούσε την ανάπτυξη κριτικής σκέψης με σύγκριση της προβληματικής κατάστασης με το παράδοξο του Αχιλλέα με τη χελώνα. Όλα τα μέλη της ομάδας ήταν σε θέση να περιγράψουν την αντίφαση μεταξύ της μαθηματικής λύσης με το τι θα συμβεί στην πραγματικότητα. Η απάντηση, όπως περιγράφεται στην Εικόνα 52, είναι ενδεικτική των απαντήσεων των υπολοίπων φοιτητριών.

Εικόνα 52: Απάντηση στην ερώτηση 3α.ii (φύλλο 5β)

ii. **Τι θα συμβεί με τη συνταξιοδότηση των υπαλλήλων; Σύγκρινε το πρόβλημα αυτό με το παράδοξο του Ζήνωνα**

Οι υπάλληλοι θα πλησιάζουν τις 8 ώρες. και δε θα τις φτάνουνε ποτέ, όπως συμβαίνει και στο παράδοξο του Ζήνωνα με την παραδοχή ότι ο χρόνος είναι δυνατό να χωριστεί σε απειροστά μέρη.
Στην πραγματικότητα όμως οι εργαζόμενοι θα συμπληρώσουν τις 8 ώρες.
Φαίνεται αληθοφανής η πρόταση του επιχειρηματία, αλλά είναι παράδοξο. Δε συμβαίνει στην πραγματικότητα

Από τη δημιουργία μίας ακολουθίας αριθμών με λόγο 1/10 προέκυψαν οι περιοδικοί αριθμοί και η σύγκριση με το αποτέλεσμα που προκύπτει από τον τύπο του αθροίσματος άπειρων όρων μίας γεωμετρικής προόδου με λόγο μικρότερο της μονάδας (Εικόνα 53).

Εικόνα 53: Άθροισμα άπειρων όρων φθίνουσας γεωμετρικής προόδου (φύλλο 5β)

3β. Ο πρώτος όρος μιας ακολουθίας αριθμών είναι ο 0,9 και ο λόγος της 1/10.

i. Γράψε την ακολουθία που προκύπτει. Ποιος αριθμός προκύπτει από το άθροισμα των όρων αυτής της ακολουθίας; Πώς ονομάζεται αυτός ο αριθμός;

0,9 , 0,09, 0,009, 0,0009 ...

Το άθροισμα που προκύπτει είναι : 0,9999 περιοδικός

ii. Το άθροισμα απείρων όρων μιας γεωμετρικής προόδου με λόγο μικρότερο της μονάδας είναι $\Sigma = \frac{a_1}{1-\lambda}$, όπου a_1 ο πρώτος όρος και λ ο λόγος της προόδου. Εφαρμόζοντας τον παραπάνω τύπο υπολόγισε το άθροισμα των όρων της παραπάνω ακολουθίας; Τι παρατηρείς; Πως το εξηγείς;

$$\Sigma = \frac{0,9}{1-\frac{1}{10}} = \frac{\frac{9}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{10\cdot 9}{9\cdot 10} = \frac{90}{90} = 1$$

Παρότι στην περίπτωση αυτή όλες οι απαντήσεις που δόθηκαν ήταν σωστές, δεν έγινε από καμία φοιτήτρια προσπάθεια εξήγησης της διαφοράς μεταξύ του αποτελέσματος που προκύπτει από τους δύο αυτούς τρόπους επίλυσης. Από τη συζήτηση που ακολούθησε προέκυψαν τα εξής: για δύο από τις πέντε φοιτήτριες η απουσία απάντησης μπορούσε να εξηγηθεί από το γεγονός ότι ο αριθμός 0,99999 ΄τείνει' στο 1 επομένως οι αριθμοί αυτοί είναι ίδιοι, ενώ οι υπόλοιπες τρεις δεν μπορούσαν να κάποια εξήγηση.

Η τελευταία ενότητα δραστηριοτήτων περιλάμβανε την επίλυση του προβλήματος της εύρεσης της ηλικίας του Διόφαντου[21], όπως αυτό διατυπώνονταν στο βιβλίο της διδακτικής παρέμβασης και απαιτούσε τη λύση μίας εξίσωσης πρώτου βαθμού (Εικόνα 54). Ζητήθηκε επίσης η διατύπωση και η λύση ενός παρόμοιου προβλήματος το οποίο θα λύνεται με πρωτοβάθμια εξίσωση. Και στις δύο περιπτώσεις δόθηκαν σωστές απαντήσεις από το σύνολο των μελών της ομάδας.

Εικόνα 54: Σωστή απάντηση στην ερώτηση 4α (φύλλο 5β)

4α. Το πρόβλημα εύρεσης της ηλικίας του Διόφαντου στη σελίδα 173 λύνεται με μια εξίσωση 1[ου] βαθμού. Γράψε την εξίσωση που προκύπτει από τα δεδομένα και λύσε την. Συμπίπτει η ηλικία που προέκυψε από την εξίσωση με το αποτέλεσμα που δίνει ο Μπέρεμιζ;

$\frac{1}{6}x + \frac{1}{12}x + \frac{1}{7}x + 5 + \frac{1}{2}x + 4 = x \Leftrightarrow$

$2x + x + \frac{12}{7}x + 60 + 6x + 48 = 12x \Leftrightarrow$

$14x + 7x + 12x + 420 + 42x + 336 = 84x \Leftrightarrow$

$84x - 14x - 7x - 12x - 42x = 756 \Leftrightarrow$

$9x = 756 \Leftrightarrow$

$\boxed{x = 84}$

Από την ανάλυση των δεδομένων της πέμπτης διδακτικής παρέμβασης διαπιστώθηκε ότι τα μέλη της ομάδας εργάστηκαν χωρίς ιδιαίτερα προβλήματα. Λανθασμένες απαντήσεις δεν υπήρξαν. Εντοπίστηκαν όμως ελλιπείς απαντήσεις σε επιμέρους ερωτήματα όπως για παράδειγμα στην Εικόνα 52 όπου δε γίνεται προσπάθεια εξήγησης των διαφορετικών αποτελεσμάτων. Η διάρκεια της παρέμβασης δεν

[21] Όπως αναφέρει ο Μιχάλης Λάμπρου στα «Σχόλια της ελληνικής έκδοσης», το πρόβλημα αναφέρεται στην βυζαντινή «Παλατινή Ανθολογία», μία συλλογή αρχαίων επιγραμμάτων τα οποία αποθησαύρισε το 917μ.Χ ο Κωνσταντίνος Κεφαλάς.

ξεπέρασε τα προβλεπόμενα από τον σχεδιασμό της έρευνας χρονικά όρια. Η ερμηνεία που δόθηκε ήταν ότι τα μέλη της ομάδας προσαρμόστηκαν στις απαιτήσεις των φύλλων εργασίας και της διδακτικής παρέμβασης γενικότερα.

6.1.7 Η 6η διδακτική παρέμβαση

Η συνάντηση για την έκτη διδακτική παρέμβαση ήταν και η τελευταία που αφορούσε το στάδιο της εφαρμογής της έρευνας. Συμμετείχαν και σε αυτή τη συνάντηση οι ίδιες πέντε φοιτήτριες, οι οποίες δεν απουσίασαν από καμία συνάντηση.

Στο πρώτο μέρος της διδακτικής παρέμβασης συζητήθηκαν τα θέματα του φύλλου πολιτισμικός πλαισίωσης 6α. Με αφορμή την ερώτηση που διατυπώνεται στη σελίδα 189 του βιβλίου: «*Ποιος περίφημος γεωμέτρης αυτοκτόνησε επειδή δεν μπορούσε να κοιτάξει τον ουρανό*»; ζητήθηκε από τις φοιτήτριες να γράψουν λίγα λόγια για τη ζωή και το έργο του Ερατοσθένη, όπως επίσης να αναφέρουν και να περιγράψουν δύο από τα σημαντικότερα επιτεύγματα του μεγάλου αυτού γεωμέτρη. Έτσι η συζήτηση από την παράθεση πληροφοριών για τη ζωή και τον τρόπο θανάτου του Ερατοσθένη εστιάστηκε σε σημαντικά επιτεύγματα όπως αυτά προέκυψαν από την αναζήτηση σε πηγές. Αυτά που αναφέρθηκαν από όλες τις συμμετέχουσες ήταν το κόσκινο του Ερατοσθένη[22], και ο υπολογισμός της περιφέρειας της γης.

Το θέμα της αυστηρότητας και της απόδειξης στον χώρο των μαθηματικών αποτέλεσε το επόμενο θέμα συζήτησης. Χωρίς απόδειξη ένα μαθηματικό πρόβλημα παραμένει στο επίπεδο της εικασίας. Ζητήθηκε από τις συμμετέχουσες να αναφέρουν γνωστές εικασίες και συζητήθηκε το «τελευταίο θεώρημα του Φερμά»[23] όπως επίσης και ο λόγος για τον οποίο προσδιορίζεται ως θεώρημα και όχι ως εικασία[24]. Συνολικά τα ερωτήματα διατυπώνονταν ως εξής:

> ***3α.*** *Στο κεφάλαιο 28 μέσα από το παράδειγμα της λανθασμένης επαγωγής τίθεται το θέμα της αυστηρότητας και της απόδειξης στον χώρο των Μαθηματικών. Χωρίς απόδειξη ένα μαθηματικό πρόβλημα παραμένει στο επίπεδο της εικασίας. Υπάρχουν αρκετά παραδείγματα εικασιών στον χώρο των Μαθηματικών. Μερικές από αυτές τις εικασίες είναι διάσημες και έχουν «επικηρυχθεί» με μεγάλα χρηματικά ποσά. Ανάφερε δύο τέτοιες εικασίες και περιέγραψε το πρόβλημα στο οποίο αναφέρονται. Τι άλλες*

---

[22] Μέθοδος εύρεσης των πρώτων αριθμών που ανακάλυψε και χρησιμοποίησε ο Ερατοσθένης.
[23] Σύμφωνα με αυτό το θεώρημα, αν ένας ακέραιος n είναι μεγαλύτερος του 2, τότε η $x^n + y^n = z^n$ δεν έχει λύση, όπου x, y, και z θετικοί ακέραιοι
[24] O Andrew Wiles και ένας πρώην φοιτητής του, ο Richard Taylor, κατάφεραν να βρουν την απόδειξη στο «τελευταίο θε ώρημα του Φερμά» το Σεπτέμβρη του 1994

πληροφορίες υπάρχουν γι' αυτές τις εικασίες σχετικά με το ποιος, πού, πότε, γιατί τις διατύπωσε; (περίπου 200 λέξεις

***3β.** Περίφημη υπήρξε η εικασία που ονομάζεται «Μεγάλο Θεώρημα του Φερμά». Ποιος ήταν ο Φερμά και ποιο το ομώνυμο θεώρημα;. Γιατί έμεινε ιστορικά γνωστό ως θεώρημα και όχι εικασία; Αποδείχτηκε τελικά; (περίπου 200 λέξεις).*

Σχετικά με το πρώτο ερώτημα (3α) εικασίες που αναφέρθηκαν ήταν: η εικασία του Goldbach[25], η υπόθεση του Riemann[26], η εικασία του Poincaré[27] όπως επίσης και η εικασία του Hodge[28]. Από τις εικασίες αυτές το ενδιαφέρον εστιάστηκε στις δύο πρώτες και κυρίως στην εικασία του Goldbach. Στην περίπτωση αυτή οι φοιτήτριες με δική τους πρωτοβουλία συζήτησαν και έλεγξαν άρτιους αριθμούς, οι οποίοι βρίσκονται στις πρώτες δεκάδες, διαπιστώνοντας με αυτόν τον τρόπο ότι μπορούν να γραφούν ως άθροισμα δύο πρώτων αριθμών. Έτσι έγινε κατανοητό ότι ένα όχι βεβαιωμένο συμπέρασμα στο οποίο οδηγείται κάποιος χωρίς απόδειξη, παραμένει μια αυθαίρετη υπόθεση, μια εικασία.

Σε σχέση με το ερώτημα 3β, το οποίο αναφερόταν στον Φερμά και το τελευταίο του θεώρημα, οι αναφορές που προέκυψαν από την αναζήτηση, την επιλογή και επεξεργασία των πληροφοριών ήταν επαρκείς και κάλυπταν με ολοκληρωμένο τρόπο το θέμα.

Τέλος, σχετικά με την τελευταία ερώτηση του φύλλου πολιτισμικής πλαισίωσης 6α, για τον ποιητή και μαθηματικό Ομάρ Καγιάμ με στίχους του οποίου τελειώνει η εξιστόρηση των περιπετειών του «ανθρώπου που μετρούσε», αναφέρθηκαν στοιχεία για τη ζωή και το έργο του.

Από την ανάλυση των δεδομένων της παρατήρησης, των απομαγνητοφωνημένων επεισοδίων αλληλεπίδρασης και των γραπτών απαντήσεων διαπιστώθηκε η ευχέρεια που απέκτησαν οι συμμετέχουσες στην αναζήτηση, στην επιλογή και επεξεργασία των πληροφοριών. Το ενδιαφέρον που εκδηλώθηκε σχετικά με τα επιτεύγματα του

---

[25] Σύμφωνα με την εικασία του Goldbach, κάθε άρτιος θετικός ακέραιος μεγαλύτερος του 2 μπορεί να γραφεί ως άθροισμα δύο πρώτων αριθμών

[26] Η υπόθεση του Riemann αφορά την αλληλουχία των πρώτων αριθμών μεταξύ των θετικών ακέραιων. Ο Riemann υποστήριξε ότι υπάρχει συστηματικότητα στην κατανομή των πρώτων αριθμών και η πρότασή του παραμένει άλυτη για 148 χρόνια

[27] Η Εικασία του Poincaré προβλέπει ότι μια τρισδιάστατη σφαίρα είναι ο μόνος κλειστός τρισδιάστατος χώρος που δεν έχει οπές. Θεωρείται κεντρικό πρόβλημα τόσο στα Μαθηματικά όσο και στη Φυσική καθώς αφορά τα σχήματα που είναι δυνατόν να έχει το Σύμπαν

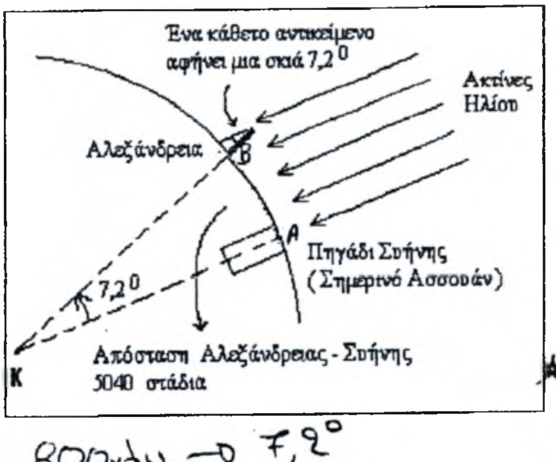
[28] Η βασική ιδέα που είχε τη δεκαετία του 1930, ο Σκωτσέζος μαθηματικός William Hodge ήταν να αναρωτηθεί μέχρι ποιο σημείο μπορούμε να προσεγγίσουμε το σχήμα ενός δεδομένου αντικειμένου, συγκολλώντας απλούς γεωμετρικούς δομικά στοιχεία με όλο και μεγαλύτερο μέγεθος. Το ερώτημα μάλιστα αυτό τέθηκε όχι μόνο για τον 3-διάστατο κόσμο αλλά και για περισσότερες διαστάσεις

Ερατοσθένη και την κατανόηση του μαθηματικού περιεχομένου εικασιών όπως για παράδειγμα της εικασίας του Goldbach ή της υπόθεσης του Riemann ήταν έντονο. Επιπλέον η συζήτηση ξέφευγε από τα όρια της απλής παράθεσης πληροφοριών και ορισμένες φορές έπαιρνε τη μορφή διαλόγου μεταξύ των μελών της ομάδας.

Στο πρώτο ερώτημα του φύλλου μαθηματικού περιεχομένου 6β οι συμμετέχουσες, με τη βοήθεια ενός σχήματος, έπρεπε να εξηγήσουν και να καταγράψουν τον τρόπο με τον οποίο εργάστηκε ο Ερατοσθένης προκειμένου να υπολογίσει την περιφέρεια της γης. Το ζητούμενο σε αυτή τη δραστηριότητα ήταν η ανάδειξη των μαθηματικών ως αποτέλεσμα της ανθρώπινης δραστηριότητας. Ο τρόπος σκέψης του Ερατοσθένη και το σχετικά εύκολο μαθηματικό περιεχόμενο του τρόπου εύρεσης της περιφέρειας της γης εντυπωσίασε τις φοιτήτριες. Όλες ήταν σε θέση να περιγράψουν και να υπολογίσουν με τη «μέθοδο των τριών» το μήκος της περιφέρειας της γης. Μία φοιτήτρια μάλιστα, κατανοώντας πλήρως την προβληματική της δραστηριότητας πρόσθεσε ως υποσημείωση: *«Με την υπόθεση ότι η γη είναι σφαιρική»* (Εικόνα 55).

Εικόνα 55: Υπολογισμός της περιφέρειας της γης (φύλλο 6β)

1. Ο Ερατοσθένης, όπως αναφέρεται στο κεφάλαιο 27, κατάφερε να μετρήσει την περιφέρεια της γης με σχετικά μεγάλη ακρίβεια γνωρίζοντας ότι μια συγκεκριμένη μέρα και ώρα (θερινό ηλιοστάσιο) στη Συήνη (Ασουάν) σε απόσταση περίπου 800 χιλιομέτρων (5040 στάδια) από την Αλεξάνδρεια, οι ακτίνες του ήλιου έπεφταν κάθετα στον πάτο ενός πηγαδιού. Παρατηρώντας την ίδια ακριβώς στιγμή στην Αλεξάνδρεια το μήκος της σκιάς του ραβδιού του υπολόγισε τη γωνία που σχηματίζουν οι ακτίνες του ήλιου με την κατακόρυφη ράβδο σε $7{,}2^0$.
Με τη βοήθεια του παρακάτω σχήματος να περιγράψεις τον τρόπο με τον οποίο εργάστηκε στη συνέχεια ο Ερατοσθένης, προκειμένου να υπολογίσει την περιφέρεια της γης.



Η απόσταση AB ισούται μ
800 χλμ. και αντιστοιχεί σε
γωνία 7,2°. Πόσα χλμ αν
σε 360°;*

$$x = \frac{800 \cdot 360^\circ}{7{,}2^\circ} = 40.000 \chi$$

*Με την υπόθεση ότι η γη
είναι σφαιρική.

800 χλμ → 7,2°
x → 360°

Οι υπόλοιπες δραστηριότητες αφορούσαν μαθηματικές σπαζοκεφαλιές οι οποίες αναφέρονταν στα τελευταία κεφάλαια του βιβλίου της διδακτικής παρέμβασης. Το ενδιαφέρον για αυτό το είδος των δραστηριοτήτων ήταν τόσο έντονο, ώστε με την ολοκλήρωση της διαπραγμάτευσης του φύλλου εργασίας 6β ζητήθηκε από όλες τις φοιτήτριες ένα επιπλέον πρόβλημα αυτής της κατηγορίας.[29]. Από αυτές τις δραστηριότητες του φύλλου 6β ιδιαίτερο ενδιαφέρον είχε η τέταρτη δραστηριότητα, η οποία είχε ως σημείο αναφοράς το παρακάτω πρόβλημα του βιβλίου της διδακτικής παρέμβασης:

> *«Ένας έμπορος από το Μπεναρές, στην Ινδία, είχε στην κατοχή του οκτώ μαργαριτάρια ολόιδια σε σχήμα, μέγεθος και χρώμα. Από αυτά τα μαργαριτάρια, τα επτά είχαν το ίδιο βάρος, ενώ το όγδοο ήταν λίγο ελαφρύτερο από τ' άλλα. Πώς ο έμπορος θα έβρισκε το ελαφρύτερο μαργαριτάρι κάνοντας μόνο δύο ζυγίσεις, και χωρίς να χρησιμοποιήσει καθόλου σταθμά; Αυτό είναι το πρόβλημα, και μακάρι ο Αλλάχ να σε βοηθήσει να βρεις μια απλή λύση.»*

Με βάση αυτή την προβληματική κατάσταση τα ερωτήματα της τέταρτης δραστηριότητας διατυπώνονταν ως εξής:

4. Λύση παρόμοια μ' αυτή που προτείνεται στο πρόβλημα με τα μαργαριτάρια στις σελίδες 214-215 του κεφαλαίου 32, μπορεί να ισχύει και στην περίπτωση που τα μαργαριτάρια είναι 4, 5, 6, 7 ή 9.

i. Στην περίπτωση που τα μαργαριτάρια ήταν 9 πως θα εργαζόσουν προκειμένου να βρεις τη λύση;

ii. Αν τα μαργαριτάρια ήταν 15 θα μπορούσες με δύο ζυγίσεις να βρεις το ελαφρύτερο; Αν όχι, πόσες τουλάχιστον ζυγίσεις θα έπρεπε να κάνεις;Στην περίπτωση που τα μαργαριτάρια ήταν 27, πόσες ζυγίσεις θα ήταν απαραίτητες ώστε να βρεις το ελαφρύτερο μαργαριτάρι; Περιέγραψε σύντομα τη λύση που προτείνεις.

Έχοντας υπόψη τους τον τρόπο τον οποίο πρότεινε για τη λύση του προβλήματος ο ήρωας του βιβλίου, οι φοιτήτριες απάντησαν σωστά και στα τρία ερωτήματα (Εικόνα 56).

---

[29] Τα πρόβλημα που τέθηκε ήταν το παρακάτω: «*Στα 10 σακιά με λίρες που έχουμε το ένα περιέχει κάλπικες λίρες. Αν κάθε λίρα ζυγίζει 2 γρ, και η κάλπικη 1 γρ. τότε με μία ζύγιση να βρεθεί το σακί που περιέχει τις κάλπικες λίρες*»

Εικόνα 56: Σωστές απαντήσεις στις ερωτήσεις 4.i, 4.ii και 4.iii (φύλλο 6β)

i. Στην περίπτωση που τα μαργαριτάρια ήταν 9 πως θα εργαζόσουν προκειμένου να βρεις τη λύση;

Α → 3
Β → 3
Γ → 3

Ζυγίζουμε ομάδες Α και Β. Αν Α=Β, τότε το ελαφρύτερο μαργαριτάρι βρίσκεται στην ομάδα Γ και μ' ένα ζύγισμα ακόμη βρίσκουμε ποιο είναι.
Αν Α>Β ή Β>Α, το ελαφρύτερο μαργαριτάρι θα βρίσκεται στην ομάδα με το μικρότερο βάρος, οπότε πάλι με ένα ζύγισμα των 2 από τα 3 μαργαριτάρια της ελαφρύτ ομάδας, το βρίσκουμε

ii. Αν τα μαργαριτάρια ήταν 15 θα μπορούσες με δύο ζυγίσεις να βρεις το ελαφρύτερο; Αν όχι, πόσες τουλάχιστον ζυγίσεις θα έπρεπε να κάνεις;

Α → 5
Β → 5
Γ → 5

Αν Α=Β, ζυγίζουμε πρώτα ανά 2 και μετά ανά 1 τα μαργαριτάρια της ομάδας Γ.
Αν Α>Β ή Β>Α ζυγίζουμε πρώτα ανά 2 και μετά ανά 1 τα μαργαριτάρια της ελαφρύτερης ομάδας.
Άρα 3 ζυγίσεις απαιτούνται.

iii. Στην περίπτωση που τα μαργαριτάρια ήταν 27, πόσες ζυγίσεις θα ήταν απαραίτητες ώστε να βρεις το ελαφρύτερο μαργαριτάρι; Περιέγραψε σύντομα τη λύση που προτείνεις

Α → 9
Β → 9
Γ → 9 < Δ → 3, Ε → 3, ΣΤ → 3 < Ζ → 1, Η → 1, Θ → 1

Αν Α=Β, ζυγίζουμε τις υποομάδες Δ και Ε. Αν Δ=Ε ζυγίζουμε τις υποομάδες Ζ και Η. Αν Ζ=Η, το ελαφρύτερο μαργαριτάρι είναι το Θ.

Από την ανάλυση των δεδομένων διαπιστώθηκε πως η ενδιαφέρουσα θεματολογία (υπολογισμός της περιφέρειας της γης) και ο παιγνιώδης χαρακτήρας των δραστηριοτήτων οδήγησε σε γρήγορες και σωστές απαντήσεις. Για μία ακόμη φορά η αξιοποίηση ιστορικών προβλημάτων και επιτευγμάτων μέσα από κατάλληλα δομημένες δραστηριότητες φαίνεται πως λειτούργησε προς όφελος των εκπαιδευομένων.

Σε αυτό το σημείο πρέπει να αναφερθούν δύο ακόμη γεγονότα που ενισχύουν την άποψη πως η αξιοποίηση της ιστορίας των μαθηματικών μπορεί να προσφέρει πολλά και να ανοίξει νέους ορίζοντες στη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών. Το πρώτο γεγονός αφορά την παράκληση από την Ε. για τη δημιουργία μιας λίστας με τίτλους βιβλίων μαθηματικής λογοτεχνίας. Το δεύτερο γεγονός έχει να κάνει με το γενικότερο αίτημα της αποστολής στην ηλεκτρονική διεύθυνση κάθε φοιτήτριας όλων των φύλλων εργασίας, τα οποία αποτέλεσαν και το κατεξοχήν υλικό των διδακτικών παρεμβάσεων.

6.2 Το τελικό ερωτηματολόγιο

Το τελικό ερωτηματολόγιο δόθηκε στο τέλος της έβδομης και τελευταίας συνάντησης και για τον λόγο αυτό απαντήθηκε από τις πέντε φοιτήτριες που συμμετείχαν αδιάλειπτα σε όλες τις συναντήσεις της διδακτικής διαδικασίας.

Με τις ερωτήσεις του ερωτηματολογίου επιδιώχθηκε η διερεύνηση των απόψεων και αντιλήψεων των φοιτητριών, οι οποίες συμμετείχαν στην ερευνητική διαδικασία, σε σχέση με τα ερευνητικά ερωτήματα. Συγκεκριμένα οι επιμέρους ερευνητικοί άξονες αφορούσαν:

- την καταγραφή και τη διερεύνηση απόψεων και αντιλήψεων για το λογοτεχνικό βιβλίο και πιθανών τρόπων αξιοποίησης του στο μέλλον,
- τη διερεύνηση των επιπτώσεων της διδακτικής παρέμβασης στον τρόπο με τον οποία γίνεται αντιληπτή η σχέση με τα μαθηματικά,
- την καταγραφή και τη διερεύνηση απόψεων και αντιλήψεων για τις δραστηριότητες των φύλλων εργασίας και της πιθανότητας υιοθέτησης κάποιων από αυτές στο μέλλον,
- την καταγραφή και τη διερεύνηση των απόψεων για τη διδακτική προσέγγιση και των διδακτικών πρακτικών που θα μπορούσαν να άξιοποιηθούν μελλοντικά,
- τη διερεύνηση του προσωπικού ενδιαφέροντος για παρόμοια λογοτεχνικά βιβλία, το οποίο προκλήθηκε από τη συμμετοχή στην πειραματική ομάδα.

Από την επεξεργασία και την ανάλυση των απαντήσεων σε σχέση με τους παραπάνω ερευνητικούς άξονες προέκυψαν τα εξής:

1. Για το βιβλίο της διδακτικής παρέμβασης υπήρξαν αντικρουόμενες απόψεις. Μία φοιτήτρια το θεώρησε ‘λίγο ενδιαφέρον’, δύο φοιτήτριες ‘απλώς ενδιαφέρον’ και δύο ‘πολύ ενδιαφέρον’. Από την αιτιολόγηση των απαντήσεων σχετικά με τον βαθμό ενδιαφέροντος προέκυψε, ότι η αξιολόγηση έγινε με λογοτεχνικά κριτήρια. Ενώ όλες οι απαντήσεις αξιολογούσαν το μαθηματικό περιεχόμενο ως πολύ ενδιαφέρον, το ύφος και το είδος του λογοτεχνικού κειμένου αποτέλεσε αντικείμενο κριτικής. Η Ε. ανέφερε «*μου άρεσε λίγο διότι λογοτεχνικά δε με ενθουσίασε*», ενώ στη Σ.Π δε «*φάνηκε αρκετά λογοτεχνική η γραφή, η διήγηση*». Στην περίπτωση αξιοποίησης του βιβλίου της διδακτικής παρέμβασης στο σχολείο η απάντηση ήταν θετική και καθολική. Προτάθηκε η αξιοποίηση του στις τελευταίες τάξεις του δημοτικού και στο γυμνάσιο «*σαν μια εντελώς διαφορετική και εναλλακτική ματιά των μαθηματικών, πιο ενδιαφέρουσα από την τυπική και στείρα στην οποία έχουν συνηθίσει οι μαθητές*». Τέθηκε επιπλέον θέμα επιλογής των δραστηριοτήτων ανάλογα με τον βαθμό δυσκολίας τους και προτάθηκαν τρόποι αξιοποίησης όπως για παράδειγμα, «*ως επέκταση της ύλης του σχολικού εγχειριδίου*», «*ως προβληματισμό για την εισαγωγή εννοιών*» , «*συσχετίζοντας τα προβλήματα με αντίστοιχες ενότητες*» ή «*για την όξυνση της κριτικής σκέψης*». Προέκυψε επίσης, ότι το βιβλίο θα μπορούσε να αξιοποιηθεί ως λογοτεχνικό κείμενο, ως συμπληρωματικό εγχειρίδιο δασκάλου ή για την παρουσίαση πολιτιστικών στοιχείων και ιστορικών γεγονότων.

2. Τρεις από τις πέντε φοιτήτριες ανέφεραν πως η σχέση τους με τα μαθηματικά μετά τη διδακτική παρέμβαση βελτιώθηκε, ενώ για τις άλλες δύο η σχέση παρέμεινε σταθερή. Τέσσερις από τις πέντε φοιτήτριες θεώρησαν ότι μετά τη διδακτική παρέμβαση άλλαξε ο τρόπος που αντιμετωπίζουν τα μαθηματικά. Οι ίδιες εξηγούν πολύ παραστατικά τους λόγους αυτής της αλλαγής:

> Ε: «*Πάντα θεωρούσα τα μαθηματικά σύνθετα και δύσκολα, αλλά συνειδητοποίησα ότι εμείς τα κάνουμε δύσκολα, κατάλαβα ότι πρέπει να απλοποιήσουμε τη σκέψη μας*»
>
> Α: «*Τώρα βλέπω τα μαθηματικά πιο προσιτά και φιλικά. Πιστεύω πως με βοήθησε να εμπιστευθώ τις προσωπικές μου ικανότητες...*»
>
> Σ.Μ: «*Οι λύσεις δε βρίσκονται πάντα με τον πιο πολύπλοκο τρόπο*»

Να σημειωθεί ότι η μοναδική που δεν απάντησε θετικά στο παραπάνω ερώτημα, ήταν η φοιτήτρια που αντιμετώπιζε τις λιγότερες δυσκολίες και τα λιγότερα προβλήματα με τις δραστηριότητες των φύλλων εργασίας κατά τη διάρκεια των διδακτικών παρεμβάσεων. Η διαπίστωση αυτή οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η φοιτήτρια αυτή αντιμετώπιζε ήδη διαφορετικά τα μαθηματικά από ότι οι υπόλοιπες συμμετέχουσες. Η διδακτική διαδικασία, επομένως, δεν επηρέασε τον τρόπο που αντιμετώπιζε τα μαθηματικά με την ένταση που επηρέασε τις υπόλοιπες συμμετέχουσες.

3. Σχετικά με τις δραστηριότητες των φύλλων εργασίας που θα μπορούσαν να αξιοποιηθούν μελλοντικά αναφέρθηκε μια σειρά από προβλήματα, μαθηματικές σπαζοκεφαλιές όπως επίσης και η αξιοποίηση «*βιογραφικών στοιχείων σπουδαίων μαθηματικών*».

4. Οι απόψεις των φοιτητριών για τη διδακτική προσέγγιση και την επιλογή κατάλληλων διδακτικών πρακτικών συνοψίζονται στον παρακάτω Πίνακα 3. Όπως προκύπτει από τις απαντήσεις, η διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών μπορεί να προσεγγιστεί με τη χρήση λογοτεχνίας και με τη χρήση στοιχείων από άλλους επιστημονικούς κλάδους στο πλαίσιο μίας διεπιστημονικής ή μίας διαθεματικής προσέγγισης. Η αξιοποίηση ιστορικών προβλημάτων και μαθηματικών επιτευγμάτων, η παρουσίαση βιογραφικών στοιχείων μεγάλων μαθηματικών και η σύνδεση των μαθηματικών με το κοινωνικο-πολιτισμικό πλαίσιο μέσα στο οποίο αυτά αναδεικνύονται, αποτελούν τις κυριότερες διδακτικές πρακτικές για την αξιοποίηση της ιστορίας των μαθηματικών στα μαθηματικά και τη μαθηματική εκπαίδευση γενικότερα.

Πίνακας 3: Απόψεις και αντιλήψεις για τη διδακτική προσέγγιση και τις διδακτικές πρακτικές

Ερώτηση 9. Από την εμπειρία που αποκόμισες κατά τη διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης πιστεύεις: **α) ότι η διδασκαλία και μάθηση των Μαθηματικών μπορεί να προσεγγιστεί με τη χρήση λογοτεχνικών κειμένων ή βιβλίων;**				
Συμφωνώ απόλυτα	Συμφωνώ	Δεν έχω γνώμη	Διαφωνώ	Διαφωνώ απόλυτα
3	2	-	-	-
β) ότι η διδασκαλία και μάθηση των Μαθηματικών μπορεί να προσεγγιστεί με τη χρήση στοιχείων από διακριτούς επιστημονικούς κλάδους ή με την ενοποίηση διακριτών επιστημονικών κλάδων;				
Συμφωνώ απόλυτα	Συμφωνώ	Δεν έχω γνώμη	Διαφωνώ	Διαφωνώ απόλυτα
1	4	-	-	-

Ερώτηση 10. Αν στην ερώτηση 9β απάντησες ότι συμφωνείς με οποιοδήποτε τρόπο, ποια ή ποιες από τις παρακάτω διδακτικές πρακτικές πιστεύεις ότι θα διευκόλυναν την ενσωμάτωση της ιστορίας στο μάθημα των μαθηματικών;	
Χρήση δευτερευουσών ιστορικών πηγών	-
Παρουσίαση βιογραφιών μεγάλων μαθηματικών	3
Ιστορικά αποσπάσματα μαθηματικών επιτευγμάτων	4
Αξιοποίηση ιστορικών προβλημάτων	5
Χρήση διαδικτύου ως πηγή πληροφόρησης	2
Σύνδεση μαθηματικών με το εκάστοτε κοινωνικό και πολιτισμικό τους πλαίσιο	3
Άλλο	1

5. Όπως προκύπτει από τις απαντήσεις στην ερώτηση 11 του τελικού ερωτηματολογίου άλλα και το αίτημα φοιτήτριας για λίστα βιβλίων, όπως αναφέρθηκε στην προηγούμενη υποενότητα, προκλήθηκε έντονο ενδιαφέρον για λογοτεχνικά βιβλία που ανήκουν στην κατηγορία της μαθηματικής λογοτεχνίας. Δύο φοιτήτριες ανέφεραν ότι κατά τη διάρκεια της διδακτικής διαδικασίας διάβασαν ήδη ένα άλλο βιβλίο αυτής της κατηγορίας, δύο απάντησαν ότι σίγουρα θα διάβαζαν κάποιο και μία ανέφερε τη σοβαρή πιθανότητα ενασχόλησης με βιβλίο αυτής της κατηγορίας (Πίνακας 4).

Πίνακας 4: Ενδιαφέρον για βιβλία μαθηματικής λογοτεχνίας

Ερώτηση 11. Λογοτεχνικά βιβλία με μαθηματικό περιεχόμενο κυκλοφορούν τα τελευταία χρόνια πολλά και ορισμένα από αυτά ανήκουν στην κατηγορία των ευπώλητων (best sellers). Θα διάβαζες μετά τη συμμετοχή σου στην πειραματική ομάδα κάποιο/α από αυτά;				
Έχω διαβάσει ήδη κάποιο/α	Σίγουρα ναι	Μάλλον ναι	Μάλλον όχι	Σίγουρα όχι
2	2	1	-	-

Η τελευταία ερώτηση του ερωτηματολογίου στόχευε στην καταγραφή των απόψεων και των αντιλήψεων των μελών της ομάδας σχετικά με τη συμμετοχή τους στη διδακτική διαδικασία. Από τις απαντήσεις που δόθηκαν ενισχύθηκαν οι διαπιστώσεις που έγιναν κατά τη διάρκεια των διδακτικών παρεμβάσεων. Συγκεκριμένα απόψεις όπως «*εξαλείφθηκε η αρνητική προκατάληψη…απέναντι στα μαθηματικά*», «*θα ήθελα να έχω περισσότερο χρόνο να ασχοληθώ με τα θέματα που μας απασχόλησαν*», «*από* *την αναζήτηση πληροφοριών...εξοικειώθηκα αρκετά τόσο με τη χρήση του διαδικτύου όσο και με τη χρήση Η/Υ...συγχρόνως έβαλα το μυαλό μου να δουλέψει»*, είναι ενδεικτικές των πλεονεκτημάτων που προσφέρει μία διδακτική προσέγγιση που ενσωματώνει στη διδακτική πράξη τη λογοτεχνία με την ιστορία των μαθηματικών στη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών.

Η κριτική που ασκήθηκε στα φύλλα εργασίας εστιάστηκε στον βαθμό δυσκολίας κάποιων δραστηριοτήτων και το πλήθος των υπό διαπραγμάτευση δραστηριοτήτων. Οι δυσκολίες αυτές όπως και η πυκνότητα της θεματολογίας ήταν γνωστές στον εκπαιδευτικό –ερευνητή. Προέκυψαν όμως από τους περιορισμούς και τις αποφάσεις που έπρεπε να ληφθούν στο στάδιο του σχεδιασμού της διδακτικής διαδικασίας, όπως ήδη συζητήθηκε στο δεύτερο κεφάλαιο του δεύτερου μέρους της εργασίας.

Σύμφωνα με τον σχεδιασμό έρευνας ο χρονικός περιορισμός που σηματοδοτούταν από τη λήξη του χειμερινού εξαμήνου και την έναρξη της εξεταστικής περιόδου οριοθετούσε σε έξι τις διδακτικές παρεμβάσεις που θα έπρεπε να πραγματοποιηθούν. Παρότι έγινε επιλογή των δραστηριοτήτων με κριτήριο τη δυνατότητα αξιοποίησης τους στην εκπαιδευτική διαδικασία, το πλήθος των δραστηριοτήτων που ικανοποιούσαν αυτό το κριτήριο οδήγησε στο φαινόμενο της πληθώρας δραστηριοτήτων, γεγονός που αποτέλεσε σημείο κριτικής από τη μεριά των φοιτητριών που συμμετείχαν στην ερευνητική διαδικασία. Ωστόσο, η κριτική που ασκήθηκε για τη δυσκολία ορισμένων δραστηριοτήτων, δε φαίνεται να έχει κάποια αιτιολόγηση. Άλλωστε τέτοιου είδους ερευνητικές προσεγγίσεις δεν μπορούν και δεν πρέπει να στηρίζονται μόνο σε απλές, εύκολες και εκ των προτέρων γνωστές δραστηριότητες. Κάτι τέτοιο θα έθετε υπό αμφισβήτηση την αξιοπιστία και την εγκυρότητα των ερευνητικών δεδομένων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΒΔΟΜΟ

Συζήτηση –Αξιολόγηση της διδακτικής διαδικασίας

Στο κεφάλαιο αυτό η ποιοτική ανάλυση και η επεξεργασία των ερευνητικών ευρημάτων οδηγεί στην αξιολόγηση της διδακτικής διαδικασίας και στην ερμηνεία των αποτελεσμάτων που προέκυψαν από αυτή. Το υλικό που προέκυψε από τη συλλογή των δεδομένων της έρευνας αναλύεται και αξιολογείται σε σχέση με τον σκοπό, τους στόχους και τα ερευνητικά ερωτήματα τα οποία είχαν τεθεί. Συζητούνται συμπεράσματα που προέκυψαν από τον σχεδιασμό, την εφαρμογή και την αξιολόγηση της διδακτικής διαδικασίας. Από τις προτάσεις διδακτικής αξιοποίησης, προκύπτουν νέα ερωτήματα και προβληματισμοί για τον μελλοντικό ερευνητή.

7.1 Συζήτηση - Αξιολόγηση της διδακτικής διαδικασίας

Όπως ήδη αναφέρθηκε σκοπός της έρευνας, ήταν ο σχεδιασμός, η παραγωγή, η διδακτική εφαρμογή και η αξιολόγηση εκπαιδευτικού υλικού, το οποίο αξιοποιώντας ένα βιβλίο μαθηματικής λογοτεχνίας, ενσωματώνει την ιστορία των μαθηματικών και τη λογοτεχνία στη διδασκαλία των μαθηματικών. Στα προηγούμενα κεφάλαια περιγράφηκαν και συζητήθηκαν αναλυτικά τα στάδια της ερευνητικής διαδικασίας.

Η αξιολόγηση της διδακτικής διαδικασίας και οι διαπιστώσεις που ακολουθούν προέκυψαν από τη συστηματική ανάλυση και επεξεργασία των δεδομένων της διδακτικής διαδικασίας. Είναι αποτέλεσμα της παρατήρησης των επεισοδίων αλληλεπίδρασης κατά τη διάρκεια υλοποίησης των διδακτικών παρεμβάσεων, της αποκωδικοποίησης των δεδομένων της αρχικής συνέντευξης και της ανάλυσης και επεξεργασίας των απόψεων και αντιλήψεων των φοιτητριών όπως αυτές διατυπώθηκαν στο τελικό ερωτηματολόγιο. Τα πολλά οφέλη της κατάλληλης ενσωμάτωσης της ιστορίας των μαθηματικών όπως προκύπτουν από την αξιολόγηση της διδακτικής διαδικασίας είναι, κατά την γνώμη μας, αναμφισβήτητα

Συνοψίζοντας τα οφέλη αυτής της προσπάθειας, μπορούμε να αναφέρουμε ότι :

1. Η πλειοψηφία των φοιτητριών που συμμετείχαν στη διδακτική παρέμβαση ενεργοποιήθηκε ερευνητικά. Αναζήτησαν πηγές (κυρίως στο διαδίκτυο), επεξεργάστηκαν και αξιοποίησαν πληροφορίες αναπτύσσοντας ικανότητες αξιολόγησης και σύγκρισης των πληροφοριών. Σχετικά με τη δομή των κειμένων τους, με την πάροδο του χρόνου γινόταν εμφανής η προσπάθεια να αποκτήσουν αυτά χαρακτηριστικά επιστημονικού κειμένου. Από την επεξεργασία του συνόλου των φύλλων εργασίας και ειδικότερα των φύλλων πολιτισμικής πλαισίωσης επιβεβαιώθηκαν οι διαπιστώσεις μας, όπως αυτές ήδη καταγράφηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο κατά τη συζήτηση των διδακτικών παρεμβάσεων, σχετικά με την αναζήτηση των πηγών και την επιλογή και επεξεργασία των πληροφοριών. Πηγή της πληροφορίας δεν αποτελούσε πλέον μία ιστοσελίδα, ένα βιβλίο ή μία εγκυκλοπαίδεια. Υπήρξαν αρκετές περιπτώσεις τριών η τεσσάρων αναφορών για ένα θέμα. Η επεξεργασία και η επιλογή των κατάλληλων πληροφοριών εμφάνισε σημαντική βελτίωση. Το φαινόμενο των συρραφών ελαχιστοποιήθηκε και στην επιλογή των πληροφοριών εμφανίστηκε το κριτήριο της σημαντικότητας της πληροφορίας σε σχέση με το υπό διαπραγμάτευση θέμα. Έτσι οι αναφορές σε ανούσια, περιττά πληροφοριακά στοιχεία μειώθηκαν σημαντικά. Οι διαπιστώσεις αυτές ερμηνεύονται ως αποτέλεσμα του αυξημένου ενδιαφέροντος που είχαν οι δραστηριότητες αυτές για τις φοιτήτριες που συμμετείχαν στην ομάδα, όπως επίσης και λόγω της ευαισθητοποίησης τους σε προσεγγίσεις οι οποίες καταργούν τα διακριτά όρια των επιστημονικών κλάδων προσφέροντας πιο σφαιρική γνώση.

2. Οι φοιτήτριες συνειδητοποίησαν ότι τα διάφορα επιστημονικά πεδία δεν είναι ανεξάρτητα και άσχετα μεταξύ τους. Η ιστορική έρευνα έφερε στο προσκήνιο την άμεση αλληλεπίδραση των μαθηματικών με την ιστορία και τη φιλοσοφία των μαθηματικών, με τη λογοτεχνία, με τις φυσικές επιστήμες και κάποιες φορές με τα θρησκευτικά. Κατανόησαν ότι αυτή η σχέση δεν υπήρξε μόνο στο παρελθόν για να εξαντληθεί στην πορεία, ως αποτέλεσμα της διεύρυνσης και της εξειδίκευσης των επιστημονικών περιοχών. Είναι μια σχέση η οποία συνδέεται άμεσα με το κοινωνικό και πολιτισμικό πλαίσιο το οποίο εξελίσσεται και αλλάζει στη πορεία του χρόνου.

3. Ο τρόπος προσέγγισης της διδακτικής διαδικασίας επηρεάζει τον τρόπο που οι συμμετέχουσες αντιλαμβάνονται τη σχέση τους με τα μαθηματικά. Η ανάδειξη της ανθρώπινης διάστασης των μαθηματικών και του ρόλου του κοινωνικο-πολιτισμικού πλαισίου στη διαμόρφωση και εξέλιξη τους, μέσα από την αξιοποίηση της ιστορίας των μαθηματικών, λειτουργεί θετικά δημιουργώντας προϋποθέσεις ουσιαστικής μάθησης. Οι συμμετέχουσες αντιμετώπισαν τα μαθηματικά όχι ως μάθημα με την παραδοσιακή σημασία αλλά ως προϊόν της ανθρώπινης σκέψης, το οποίο αναδεικνύεται στα πλαίσια ενός συγκεκριμένου κοινωνικο-πολιτισμικού πλαισίου. Η αντίληψη ότι τα μαθηματικά είναι ένα σύνολο συμβόλων, σχέσεων, τύπων και διαδικασιών οι οποίες λειτουργούν ως εργαλεία αποκλειστικά για την αντιμετώπιση του μαθήματος και των σχολικών ασκήσεων, δέχτηκε ισχυρό πλήγμα. Ωστόσο, η αλλαγή αυτής της αντίληψης, η οποία είναι βαθιά ριζωμένη στους μαθητές και φοιτητές όλων των βαθμίδων εκπαίδευσης δεν αποτελεί εύκολο στόχο εξαιτίας του εξεταστικοκεντρικού προσανατολισμού του εκπαιδευτικού συστήματος.

4. Θέματα ιστορίας των μαθηματικών μπορούν να λειτουργήσουν ως κίνητρο για τη μάθηση εφόσον ανταποκρίνονται στα ενδιαφέροντα και στις ανησυχίες των συμμετεχόντων. Η φύση των θεμάτων από τον χώρο της ιστορίας και της φιλοσοφίας των μαθηματικών και η πιθανή σύνδεσή τους με προσωπικά ενδιαφέροντα ή προσωπικές αναζητήσεις μπορεί να λειτουργήσει ως κίνητρο για τη μάθηση και την ανάδειξη ικανοτήτων, δεξιοτήτων και ταλέντων που πολλές φορές περνάνε απαρατήρητα. Από την παρατήρηση των διδακτικών παρεμβάσεων καταγράφονται επεισόδια αλληλεπίδρασης με αφορμή έννοιες, ιστορικά γεγονότα ή προβλήματα για τα οποία υπήρξε ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Οι φοιτήτριες ενδιαφέρθηκαν να μάθουν για τα άλυτα προβλήματα της αρχαιότητας, για τους τρίγωνους, τους τετράγωνους, τους τέλειους και τους φίλιους αριθμούς όπως άλλωστε υποθέταμε. Αυτό που δεν αναμέναμε και μας ξάφνιασε ευχάριστα ήταν το έντονο ενδιαφέρον για θέματα φιλοσοφίας των μαθηματικών, όπως διαπιστώθηκε από τη συζήτηση για τη «θεωρία των ιδεών» του Πλάτωνα, για την ύπαρξη του αριθμού **φ** της χρυσής τομής στη φύση ή ακόμη για τις θρησκευτικό- φιλοσοφικές διαμάχες στην εποχή της Υπατίας.

5. Η θεματολογία της διδακτικής διαδικασίας, έφερε στο προσκήνιο μαθηματικά θέματα τα οποία ξεφεύγουν από την διδακτέα ύλη της πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης ή αν υπάρχουν δεν τους δίνεται η απαραίτητη σημασία όπως διαπιστώθηκε με το πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου. Σε αυτό το σημείο, αναδεικνύεται η σημασία του ρόλου του εκπαιδευτικού, ο οποίος εφοδιασμένος με επιστημονικές γνώσεις και παιδαγωγική-διδακτική επάρκεια μπορεί αναδείξει την ανθρώπινη διάσταση των μαθηματικών. Βέβαια, με τη σειρά της η παραδοχή αυτή οδηγεί και σε θέματα εκπαίδευσης και επιμόρφωσης των εκπαιδευτικών, ώστε οι ίδιοι να μπορούν να αναλαμβάνουν πρωτοβουλίες και δράσεις προς όφελος των μαθητών τους.

6. Οι παρεμβάσεις, όπως σχεδιάστηκαν, αφορούσαν την ατομική πραγμάτευση των δραστηριοτήτων. Από την παρατήρηση των επεισοδίων αλληλεπίδρασης διαπιστώθηκε η ανάγκη των φοιτητριών για περισσότερη συνεργασία και αλληλοβοήθεια. Έτσι, παρά το γεγονός ότι οι διδακτικές παρεμβάσεις δεν περιλάμβαναν ομαδικές δραστηριότητες, σε ορισμένες περιπτώσεις και όταν πλέον η λύση δεν ήταν δυνατόν να προκύψει από την ατομική αναζήτηση και προσπάθεια, η επιλογή ήταν να αφήνουμε ελεύθερα τα μέλη να αλληλεπιδράσουν και να πραγματευθούν από κοινού τις δραστηριότητες. Με τον τρόπο αυτό οι διδακτικές παρεμβάσεις απέκτησαν περισσότερο ομαδικό και κοινωνικό χαρακτήρα χωρίς όμως να πάρουν ομαδοσυνεργατική μορφή. Αυτό, άλλωστε, το οποίο τέθηκε ως προϋπόθεση συλλογικής πραγμάτευσης ήταν ότι η συνεργασία έπρεπε να στοχεύει στην ανάδειξη ιδεών και στην κατάθεση προτάσεων και όχι στην επίδειξη λύσης .

7. Από την υλοποίηση μιας τέτοιας προσέγγισης στην εκπαιδευτική διαδικασία προκύπτουν οφέλη για τον εκπαιδευτικό και τους εκπαιδευόμενους. Στον πρώτο, η φύση της παρέμβασης, δίνει τη δυνατότητα να «δει» από μια άλλη οπτική την τάξη, να εντοπίσει και να διερευνήσει προβλήματα, δυσκολίες ή συμπεριφορές οι οποίες δεν είναι εμφανείς με τον παραδοσιακό τρόπο διδασκαλίας Για τους μαθητές τα οφέλη είναι πολλαπλά. Όπως διαπιστώθηκε από την παρούσα έρευνα, εκτός από την επίτευξη γνωστικών στόχων οι επιπτώσεις αφορούν στην ανάδειξη δεξιοτήτων, στάσεων και συμπεριφορών από τα μέλη της ομάδας Από την παρατήρηση και την ανάλυση και επεξεργασία των απαντήσεων του ερωτηματολογίου διαπιστώθηκε αλλαγή στάσης απέναντι στο μάθημα των μαθηματικών. Η παθητική στάση μετατράπηκε σε ενεργό συμμετοχή. Όπως οι ίδιες οι συμμετέχουσες ανέφεραν, άλλαξε ο τρόπος που αντιμετωπίζουν τα μαθηματικά. Μάλλον πρέπει να συσχετίσουμε αυτή την αλλαγή, με την διδακτική διαδικασία και την πορεία υλοποίησής της. Άλλωστε, το ερώτημα δεν ήταν μόνον αν και κατά πόσο οι φοιτήτριες γίνονται «ικανότερες» στο μάθημα των μαθηματικών αλλά αν το κλίμα που δημιουργείται έτσι (με τη διδακτική αξιοποίηση της μαθηματικής λογοτεχνίας και της ιστορίας των μαθηματικών) δίνει τη δυνατότητα να δουν τα μαθηματικά από μία άλλη οπτική.

Προκύπτουν όμως και δυσκολίες στην αξιοποίηση της ιστορίας των μαθηματικών στην πράξη. Η συγκεκριμένη διδακτική διαδικασία φαίνεται να μη λειτούργησε προς όφελος όλων των μελών της πειραματικής ομάδας. Από την ανάλυση των απαντήσεων στα φύλλα εργασίας, την απομαγνητοφώνηση και τις καταγραφές των επεισοδίων αλληλεπίδρασης διαπιστώθηκε συσχέτιση των δυσκολιών, του απαιτούμενου χρόνου για τη διαπραγμάτευση ενός θέματος και της ποιότητας των απαντήσεων με το έτος σπουδών και τη λυκειακή κατεύθυνση. Σε μια προσπάθεια ερμηνείας των τριών οικειοθελών αποχωρήσεων των φοιτητριών που προέρχονταν από τη θεωρητική κατεύθυνση, διαπιστώνεται ότι η συμμετοχή στις διδακτικές παρεμβάσεις απαιτούσε ένα ελάχιστο γνώσεων πάνω στο οποίο οι νέες γνώσεις θα μπορούσαν να οικοδομηθούν και να στηριχθούν. Το παράδοξο εδώ είναι ότι η διδακτική αξιοποίηση της ιστορίας και της λογοτεχνίας, κλάδοι πλησιέστεροι στη θεωρητική κατεύθυνση από τις οποία προέρχονταν οι φοιτήτριες που εγκατέλειψαν το μάθημα, δεν κατόρθωσε να τις φέρει πλησιέστερα στα μαθηματικά, ενώ λειτούργησε περισσότερο προς όφελος φοιτητριών από άλλες κατευθύνσεις που έτσι απέκτησαν πιο σφαιρική γνώση των μαθηματικών. Το σημείο αυτό αξίζει να μελετηθεί στο μέλλον, αφού η διδακτική αξιοποίηση της λογοτεχνίας και των μαθηματικών συχνά κρίνεται θετική επειδή υποτίθεται ότι γεφυρώνει το χάσμα ανάμεσα στις δύο κουλτούρες, την επιστημονική/τεχνολογική και την ανθρωπιστική.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

<u>Ξενόγλωσση</u>

Arcavi, A., Bruckheimer, M., 2000 "Didactical uses of primary sources from the History of Mathematics", *Themes in Education*, 1 (1), 55-74

Bagni, G. T. (2004). History of Mathematics and Didactics: Reflections on Teachers Education. *Paper presented at the tenth International Congress on Mathematics Education (ICME 10)*, Discussion Group 6, Copenhagen. Retrieved 3 Feb 2008 from: http://www.syllogismos.it/history/Icme10-DG6.pdf

Barbin, E. (2000). Integrating history: Research perspectives. In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), *History in Mathematics Education: The ICMI Study"*, (pp. 63 – 90). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers

Barrow-Green, J., & Fauvel, J.(2000). History as a resource for the mathematics teacher. *A position paper for discussion on the OU's PGCE Conference, Dec 1999- Jan 2000*. Retrieved 3 Feb 2008 from: http://www.prof2000.pt/users/amma/af18/s1/jbg-jf.htm

Beane, J. (1997) *Curriculum Integration. Designing the Core of Democratic Education*. New York: Teacher College Press.

Bruner, J (1986) *Actual minds, possible worlds*. Cambridge: Harvard University Press.

Carr,W. & Kemmis, S. (1986), *Becoming Critical. Education, Knowledge and action research*, London, Routledge Falmer

Cone, T.P., & Cone, S.L. (1999).The interdisciplinary puzzle: Putting the pieces together, *Teaching Elementary Physical Education*, 10 (1), 8-11.

Confrey, J. (1990). What Constructivism Implies for Teaching, *Journal for research in Mathematics Education. Monograph*, 4, 107-122

Engelhardt, P. V., Corpuz, E. G., Ozimek, D. J., & Rebello, N. S. (2004). *The teaching experiment - What it is and what it isn't*. Retrieved 28 March 2008, from http://perg.phys.ksu.edu/papers/2003/PERC2003_TeachingExperiment.pdf

Ernest, P. (1998). The History of Mathematics in the Classroom, *Mathematics in School* 27 (4), 25-31

Fauvel, J. (1991). Using history in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, 11(2), 3 –6

Fauvel, J. & van Maanen, J. (1997). *"The role of the history of mathematics in the teaching and learning of mathematics":* Discussion document for an ICMI study (1997 – 2000). *Mathematics in School*, 26(3), 10– 11.

Freudenthal, H.(1981). Should a mathematics teacher know something about the history of mathematics, *For the Learning of Mathematics*, 2 (1), 30-33

Furinghetti, F. (1997). "History of mathematics, mathematics education, school practice: Case studies in linking different domains". *For the Learning of Mathematics*, 17(1), 55 – 61

Furinghetti, F. (2000). The long tradition of history in mathematics teaching. In V. Katz (Ed.), *Using History to Teach Mathematics: An International Perspective*, (pp. 49– 58). Washington, DC: The Mathematical Association of America.

Furinghetti, F. (2004). History and mathematics education: A look around the world with particular reference to Italy. *Paper presented at the tenth International Congress on Mathematics Education (ICME – 10)*,Discussion Group 17, Copenhagen, DK. Retrieved 3 Feb 2008 from: http://www.icme-organisers.dk/tsg17/Furinghetti-text.pdf

Gardner, H.(1993) *Multiple intelligences: the theory in practice*. New York: Basic Books,

Herrera, T & Owens, D. (2001). The "New New Math": Two reform movements in Mathematics Education, *Theory into Practice*, 40 (2), 84-92

Hitchcock, G. (1992). The "Grand Entertainment": Dramatizing the Birth and Development of Mathematical Concepts. *For the Learning of Mathematics*, 12 (1), 21-27

Komorek, M. & Duit, R. (2004). The teaching experiment as a powerful method to develop and evaluate teaching and learning sequences in the domain of non-linear systems, *International Journal of Science Education*, 26(5), 619 – 633

Lesh. R., Kelly. A., (2000). Multitiered Teaching Experiments. In A. Kelly, R. Lesh (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education.* (pp. 197-230). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates,.

Liu, P-H. (2003). Do Teachers Need to Incorporate the History of Mathematics in Their Teaching? *Mathematics Teacher*, 96 (6), 416-421

Powell, R. A., Single, H. M. & Lloyd, K. R. (1996). «Focus groups in mental health research: enhancing the validity of user and provider questionnaires», *International Journal of Social Psychology* 42(3): 193-206

Rogers, L. (1991). History of Mathematics: Resources for Teachers, *For the Learning of Mathematics,* 11 (2), 48-52

Siu, M.-K. (2000). The ABCD of using history of mathematics in the (undergraduate) classroom. In V. Katz (Ed.), *Using History to Teach Mathematics: An International Perspective*, (pp. 3-9). Washington, DC: The Mathematical Association of America.

Siu, F-K., & Siu, M.-K (1979). History of mathematics and its relation to mathematical education, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 10(4), 561 – 567

Snow, C.P. (1995*). Οι δύο κουλτούρες*. Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα

Steffe, L. P. & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In R. Lesh and A. E. Kelly (Eds.) *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 267-307.

Swetz, F. (1995). Some not so random thoughts about the history of mathematics – its teaching, learning, and textbooks, *PRIMUS*, 5(2), 97 – 107.

Swetz, F. (2000). Problem Solving from the History of Mathematics. In V. Katz (Ed.), *Using History to Teach Mathematics: An International Perspective*, (pp.59-65). Washington, DC: The Mathematical Association of America.

Triandafillidis, T. (2006) "Wishes, lies, and dreams": Poetry writing in the mathematics classroom, *For the Learning of Mathematics*, 26(2), 2-9

Tzanakis, C. & Arcavi, A. (2000). Integrating history of mathematics in the classroom: An analytic survey. In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), *"History in Mathematics Education: The ICMI Study"*, (pp. 201 – 240). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Ελληνόγλωσση

Βάμβουκας, Μ. Ι. (1998) *Εισαγωγή στην ψυχοπαιδαγωγική έρευνα και μεθοδολογία*. Αθήνα: Γρηγόρης

Cohen, L. & Manion, L. (1994). *Μεθοδολογία εκπαιδευτικής έρευνας*. Μτφρ. Χ. Μητσοπούλου, Μ. Φιλοπούλου. Αθήνα: Μεταίχμιο

Γιαννικοπούλου, Α.Α. (2002). «Λογοτεχνία και Μαθηματικά».Στο Μ. Καΐλα, Φ. Καλαβάσης, Ν. Πολεμικός (επιμ), *Μύθοι, Μαθηματικά, Πολιτισμοί: Αποσιωπημένες Σχέσεις στην Εκπαίδευση*, Αθήνα: Ατραπός,

Δοξιάδης Α. (2007) Προβάλλοντας τα μαθηματικά στην ψυχή: η αφήγηση ως εργαλείο της μαθηματικής εκπαίδευσης. Στο Δ. Χασάπης (επιμ), *Μαθηματικά και Λογοτεχνία*, Πρακτικά 6ου Διήμερου Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών. Θεσσαλονίκη: Publish City, 287-315

Θεοφιλίδης, Χ. (1997). *Διαθεματική προσέγγιση της διδασκαλίας*. Αθήνα: Εκδόσεις Γρηγόρη.

Καμπίτσης, Χ. & Χαραχούσου-Καμπίτση, Υ. (1999). *Τεχνικές έρευνας στις αθλητικές επιστήμες*. Θεσσαλονίκη: Μαίανδρος

Κολέζα, Ε. (2007) Τα μαθηματικά μέσα από τον καθρέφτη της λογοτεχνίας: ένα ταξίδι στη χώρα των θαυμάτων. Στο Δ. Χασάπης (επιμ) *Μαθηματικά και Λογοτεχνία. 6^o Διήμερο Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών*. Θεσσαλονίκη: Publish City, 27-47

Λαλαγιάννη, Β. (2005). Λογοτεχνία και Επιστήμες. Στο *Λογοτεχνία και Διαθεματικότητα: ερευνητικές προσεγγίσεις των σχολικών εγχειριδίων και της διδακτικής πράξης*. Ερευνητικό πρόγραμμα. Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας – Επιτροπή ερευνών

MacRae, S. (1999) *Μοντέλα και μέθοδοι για τις επιστήμες της συμπεριφοράς*. Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα

Ματσαγγούρας, Η. (2002). Διεπιστημονικότητα, διαθεματικότητα και ενιαιοποίηση στα νέα Προγράμματα Σπουδών: Τρόποι οργάνωσης της σχολικής γνώσης. *Επιθεώρηση Εκπαιδευτικών Θεμάτων*, 7, 19-36.

Μιχαηλίδης Τ. (2004). Μαθηματικές μυθοπλασίες. Εφημερίδα, *Η Καθημερινή*. Ανακτήθηκε 23 Ιαν 2008 από: http://www.kathimerini.gr/4dcgi/_w_articles_kathglobal_2_11/04/2004_1282732

Μιχαηλίδης Τ. (2007). Λέσχες ανάγνωσης μαθηματικού βιβλίου: Μια εναλλακτική-συμπληρωματική διδακτική πρόταση. Στο Δ. Χασάπης (επιμ.) *Μαθηματικά και Λογοτεχνία. 6ο Διήμερο Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών*. Θεσσαλονίκη: Publish City, 15-26

Νούτσος, Μπ.(2003). Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών: η ιδεολογία του αχταρμά. *Εκπαιδευτική κοινότητα*, 67, σσ. 24-29

Noye, D. & Piveteau, J. (2002). *Πρακτικός οδηγός του εκπαιδευτή*. Μτφρ. Α. Ζέη, Αθήνα: Μεταίχμιο

Παναγιωτακόπουλος, Χ., Πιερρακέας, Χ.,& Πίντελας, Π. (2003). *Το εκπαιδευτικό λογισμικό και η αξιολόγησή του.* Αθήνα: Μεταίχμιο.

Σακονίδης, Χ. (2003). *Μαθαίνοντας και διδάσκοντας μαθηματικά. Εκπαίδευση Μουσουλμανοπαίδων* 2002-2004 (ΥΠΕΠΘ- Πανεπιστήμιο Αθηνών). Ανακτήθηκε 23 Ιαν 2008 από http://www.kleidiakaiantikleidia.net/#

Σκούρας, Α. (2002). Εμπλουτίζοντας τη διδασκαλία των Μαθηματικών με διαθεματικές προσεγγίσεις, *Επιθεώρηση Εκπαιδευτικών Θεμάτων*, 7, σσ. 100-110.

Τζανάκης, Κ., & Κούρκουλος, Μ. (2000). Η παροχή Μαθηματικής Παιδείας και τα χαρακτηριστικά του μαθηματικού σκέπτεσθαι: η περίπτωση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. *Σύγχρονη Εκπαίδευση*, 111, 66-73

Τοκμακίδης, Α. (2005). Η ιστορία των μαθηματικών: Ένα διαπολιτισμικό εργαλείο για τη διδακτική των μαθηματικών. Στο Δ. Χασάπης (επιμ.) *Κοινωνικές και πολιτισμικές διαστάσεις της Μαθηματικής εκπαίδευσης*, Πρακτικά 4ου Διήμερου Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών. Θεσσαλονίκη: Α.Π.Θ.

Τριανταφυλλίδης, Τ., (2002). Ποίηση και Μαθηματικά: Η διαλογική προσέγγιση μεταξύ γνωστικών αντικειμένων και μεταξύ πολιτισμών. Στο Ε. Τρέσσου και Σ. Μητακίδου (επιμ), *Η διδασκαλία της γλώσσας και των μαθηματικών. Θεσσαλονίκη:* Παρατηρητής

Τύπας, Γ. (2005). Διδακτικό Πακέτο Μαθηματικών. Στο ΥπΕΠΘ-ΠΙ, *Επιμόρφωση σχολικών συμβούλων και εκπαιδευτικών πρωτοβάθμιας και προσχολικής Εκπαίδευσης στο ΔΕΠΠΣ και τα ΑΠΣ: Επιμορφωτικό υλικό πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης*. Αθήνα

Τζεκάκη, Μ. (2000). Εναλλακτικές διδακτικές προσεγγίσεις στη διδασκαλία των Μαθηματικών, *Πανελλήνιο Συνέδριο: Έρευνα για την ελληνική εκπαίδευση, Περιλήψεις Εισηγήσεων*, Κέντρο Εκπαιδευτικής Έρευνας. Ανακτήθηκε 8 Ιαν 2008 από http://www.kee.gr/html/researchfull.php?&ID=5&topicID=9

Υπ. Ε. Π. Θ. - Παιδαγωγικό Ινστιτούτο. (2002). *Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών (Δ. Ε. Π. Π. Σ.) και Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών (Α. Π. Σ.) Υποχρεωτικής Εκπαίδευσης*. Αθήνα. Στο: http://pi-schools.gr/programs/depps

Χασάπης, Δ. (1996). *Μάθηση και διδασκαλία βασικών μαθηματικών εννοιών: αριθμοί και αριθμητικές πράξεις*, Θεσσαλονίκη: Υπηρεσία Δημοσιευμάτων ΑΠΘ

Χασάπης, Δ. (1997). Επιστημολογικές προϋποθέσεις για τη θεώρηση της ιστορίας των μαθηματικών ως συστατικού στοιχείου της μαθηματικής εκπαίδευσης. Στο Ν. Καστάνης (επιμ.), *Προϋποθέσεις για τη Συνύφανση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη Διδακτική τους*, Ελληνική Εταιρεία Ιστορίας Επιστημών και Τεχνολογίας, Θεσσαλονίκη, 60-65

Χασάπης, Δ. (2005). Κοινωνικές διαστάσεις της μαθηματικής εκπαίδευσης: Όψεις και ζητήματα Στο Δ. Χασάπης (επιμ.) *Κοινωνικές & πολιτισμικές διαστάσεις της μαθηματικής εκπαίδευσης*, Πρακτικά 4ου Διήμερου Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών, Θεσσαλονίκη, 1-16

Χασάπης, Δ. (2007) Μαθηματικά και λογοτεχνία: Μια αιτούμενη σύζευξη Στο Δ. Χασάπης (επιμ) *Μαθηματικά και Λογοτεχνία*. Πρακτικά 6ου Διήμερου Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών. Θεσσαλονίκη: Publish City

Χατζηκυριάκου, Κ. (2006). Η ιστορία της ιστορίας των μαθηματικών: Δυο-τρία πράγματα που ξέρω γι' αυτήν. Στο Δ. Χασάπης (επιμ) *Μαθηματικά και Λογοτεχνία.* Πρακτικά 5ου Διήμερου Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών. Θεσσαλονίκη, 47-62

Χατζηκυριάκου, Κ. (2007). Η διδακτική αξιοποίηση της μαθηματικής λογοτεχνίας στο μάθημα «Διασκεδαστικά Μαθηματικά-Επίλυση Προβλημάτων». Στο Δ. Χασάπης (επιμ) *Μαθηματικά και Λογοτεχνία.* Πρακτικά 6ου Διήμερου Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών. Θεσσαλονίκη: Publish City, 277-284

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 1: Τα φύλλα πολιτισμικής πλαισίωσης

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 2: Τα φύλλα μαθηματικού περιεχομένου

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 3: Το τελικό ερωτηματολόγιο

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 1: Φύλλα πολιτισμικής πλαισίωσης

Φύλλο Εργασίας 1α

Ονοματεπώνυμο:
Ημερομηνία:

Αφού διαβάσεις προσεκτικά τα 5 πρώτα κεφάλαια του βιβλίου απάντησε στις ερωτήσεις που ακολουθούν με σύντομα και περιεκτικά. Στο τέλος κάθε απάντησης γράψε και την πηγή πληροφόρησης σου: δικτυακός τόπος, βιβλίο, άρθρο, περιοδικό κτλ.

1. Γράψε μια σύντομη περίληψη (περίπου 100 λέξεων) των κεφαλαίων που διάβασες.

2. Descartes, Pascal, Newton, Leibniz, Euler, Lagrange, Comte είναι οι επτά μεγάλοι γεωμέτρες στους οποίους ο συγγραφέας αφιερώνει το βιβλίο. Γράψε για καθέναν απ' αυτούς λίγα λόγια (περίπου 100 λέξεις) για τη ζωή και το έργο του.

René Descartes

Γαλλικό χαρτονόμισμα του 1942. Ο Descartes καθισμένος κρατώντας διαβήτη. Στα δεξιά του μία κλεψύδρα και πίσω του μια γυναικεία μορφή που συμβολίζει τη φιλοσοφία

Blaise Pascal

Γραμματόσημο του πριγκηπάτου του Μονακό του 1973

Sir Isaac Newton

Μετάλλιο με εκλατινισμένο το όνομα του Newton

Gottfried Leibniz

Ανδριάντας του Leibniz μπροστά στο πανεπιστήμιο της Δρέσδης

Leonhard Euler

Ελαιογραφία του Emanuel Handmann, 1756.

Joseph-Louis Lagrange

Γαλλικό γραμματόσημο της σειράς «Γάλλοι Επιστήμονες» έκδοσης 1958

Auguste Comte

Βραζιλιάνικο γραμματόσημο έκδοσης 1957 για τα εκατό χρόνια από το θάνατο του Comte

3. *«Τον άφηνα στη γαλήνη του, να εξιχνιάζει με το εξαιρετικό μυαλό του τα κρυμμένα μυστήρια των Μαθηματικών - της επιστήμης που τόσο βελτίωσε και ανάπτυξε η αραβική φυλή»*. Μ' αυτή τη φράση τελειώνει το δεύτερο κεφάλαιο του βιβλίου. Ποια είναι η συνεισφορά των Αράβων στα Μαθηματικά; Τι καινούριο εισήγαγαν στην έως τότε υπάρχουσα μαθηματική γνώση;(Περίπου 100 λέξεις)

Φύλλο Εργασίας 2α

Ονοματεπώνυμο:
Ημερομηνία:

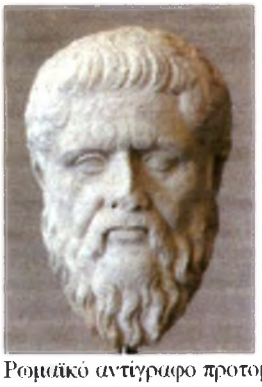
Αφού διαβάσεις προσεκτικά τα κεφάλαια 6- 9 απαντησε στις ερωτήσεις που ακολουθούν σύντομα και περιεκτικά. Στο τέλος κάθε απάντησης γράψε και την πηγή πληροφόρησης σου: δικτυακός τόπος, βιβλίο, άρθρο, περιοδικό κτλ

1. Γράψε μια σύντομη περίληψη (περίπου 90- 100 λέξεις) των κεφαλαίων που διάβασες.

2. Στις σελίδες 49 και 50 αναφέρεται ότι «*Γεωμετρία υπάρχει παντού*» και ότι ο «*Θεός είναι ο Μέγας Γεωμέτρης*» φράσεις που θυμίζουν έντονα το ρητό «Θεός αεί γεωμετρεί» που αποδίδεται στους Πυθαγόρειους. Η άποψη αυτή μάλιστα ενισχύεται με τη χρήση παραδειγμάτων από την καθημερινή ζωή.

iii. Σε ποιο έργο του εκφράζει αντίστοιχες απόψεις ο Πλάτων; Ανάφερε πολύ σύντομα, ποιες είναι αυτές; Περίφημη είναι και μια σχετική φράση του Γαλιλαίου. Τι είπε; Τι νομίζεις πώς εννοείται σε κάθε περίπτωση;

Πλάτων



Ρωμαϊκό αντίγραφο προτομής. Glyptothek. Μόναχο

Galileo Galilei.

Πίνακας του Justus Sustermans (1636)

iv. Ποια είναι η δική σου γνώμη; Τα μαθηματικά υπάρχουν με κάποιον τρόπο στη φύση (αν ναι με ποιον τρόπο;) ή σε ορισμένες περιστάσεις βλέπουμε «εμείς» τη φύση με μαθηματικό τρόπο;

3α. Στη σελίδα 58 παρουσιάζεται η άποψη –που ήταν κυρίαρχη παλαιότερα - ότι η γυναίκα δεν μπορεί να μάθει και να κατανοήσει τα Μαθηματικά. Παρ' όλο το αρνητικό κλίμα και την καχυποψία πολλές γυναίκες ασχολήθηκαν και συνέβαλλαν στην εξέλιξη των Μαθηματικών. Η πρώτη –γνωστή- από αυτές ήταν η Υπατία η Αλεξανδρινή. Γράψε λίγα λόγια (περίπου 100 λέξεις) για τη ζωή και το έργο της.

Υπατία η Αλεξανδρινή

Εξώφυλλο του πρώτου τεύχους του περιοδικού "the Woman Astronomer". Ειδική έκδοση, καλοκαίρι 1997

3β.

«Οι γυναίκες έχουν λιγότερη έμφυτη ικανότητα στις Φυσικές Επιστήμες και τα Μαθηματικά από τους άντρες. Η μία ομάδα ξεπερνά την άλλη εξαιτίας γενετικών διαφορών και όχι εμπειριών και η θεωρία πως οι άντρες είναι πιο ικανοί στις Φυσικές Επιστήμες στηρίζεται σε έρευνες και όχι στην προσωπική μου άποψη. Τα αγόρια επιτυγχάνουν υψηλότερα σκορ στις εξετάσεις από τα κορίτσια και οι διαφορές αυτές χρειάζονται περισσότερη διερεύνηση».

L. Summers, Πρόεδρος του Πανεπιστημίου Harvard (Ιανουάριος 2005)

Πηγή:http news.bbc.co.uk hi uk news education 4183495.stm)

Απόψεις σαν κι αυτή του προέδρου του Harvard, ο οποίος αναγκάστηκε να παραιτηθεί ένα χρόνο αργότερα και εξαιτίας της αναταραχής που προκάλεσαν οι απόψεις του, φαίνεται ότι δεν έχουν πάψει να κυκλοφορούν και βρίσκουν θέση ακόμη και σήμερα στη συζήτηση, για τη σχέση γυναίκας – επιστήμης.

Ποια επιχειρήματα θα χρησιμοποιούσες για να αντικρούσεις τέτοιες απόψεις; Τα επιχειρήματά σου θα πρέπει να στηρίζονται σε επιστημονικά- ερευνητικά ευρήματα και αποτελέσματα που προκύπτουν από τη σχετική βιβλιογραφία, ώστε να δοθεί έγκυρη και αξιόπιστη απάντηση στις παραπάνω απόψεις.

Φύλλο Εργασίας 3α

Ονοματεπώνυμο:
Ημερομηνία:

Αφού διαβάσεις προσεκτικά τα κεφάλαια 10-14 απάντησε στις ερωτήσεις που ακολουθούν σύντομα και περιεκτικά.. Στο τέλος κάθε απάντησης γράψε και την πηγή πληροφόρησης σου: δικτυακός τόπος, βιβλίο, άρθρο, περιοδικό κτλ.

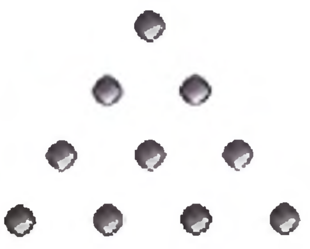
1. Γράψε μια σύντομη περίληψη (περίπου 90- 100 λέξεις) των κεφαλαίων που διάβασες.

2α. Στο ενδέκατο κεφάλαιο γίνεται για δεύτερη φορά αναφορά στον Πυθαγόρα, ιδρυτή της σχολής των Πυθαγορείων, η οποία κατέχει ιδιαίτερα σημαίνουσα θέση ανάμεσα στους Προσωκρατικούς φιλοσόφους σε σχέση με αυτό που σήμερα αποκαλούμε Φιλοσοφία των Μαθηματικών. Γράψε λίγα λόγια για τη ζωή του Πυθαγόρα και το χαρακτήρα της σχολής του. Πόσο έγκυρη ιστορική γνώση έχουμε γι αυτά; (Μέχρι 300 λέξεις)

Πυθαγόρας

Ο Πυθαγόρας διδάσκει σε μαθητές του
Λεπτομέρεια από την τοιχογραφία
«Η σχολή των Αθηνών»
όπως την εμπνεύστηκε ο αναγεννησιακός
ζωγράφος Ραφαήλ Σάντσιο (1483 -1520).
Stanza della Segnatura, Βατικανό

2β. Ποια είναι η σημασία της τετρακτύος για τους πυθαγόρειους;



Η ιερή τετρακτύς των Πυθαγορείων

3α. Για δεύτερη φορά επίσης στο κεφάλαιο 14 μνημονεύεται ο Ευκλείδης ως ένας από τους δημιουργούς του λαμπρού οικοδομήματος των μαθηματικών. Το έργο του αποτέλεσε τη βάση πάνω στην οποία αναπτύχθηκαν τα μαθηματικά και ενέπνευσε πολλούς μεταγενέστερους μαθηματικούς. Γράψε λίγα λόγια για τη ζωή και το έργο του μεγάλου αυτού γεωμέτρη Ποια μέθοδο εισήγε στα μαθηματικά; Ποιο είναι το περίφημο 5ο αίτημα ή αλλιώς «αξίωμα της παραλληλίας»; Γιατί είναι περίφημο; (Μέχρι 300 λέξεις).

Ευκλείδης

«Ευκλείδης ο Μεγαρεύς»
Πίνακας του Joos van Wassenhove (1474)
Galleria Nazionale delle Marche. Urbino

3β. Η Γεωμετρία του Ευκλείδη αποτέλεσε το θεμέλιο για την ανάπτυξη της «δυτικής» επιστήμης και τεχνικής και σ' αυτή τη Γεωμετρία στηρίζονται οι προϋποθέσεις της κλασικής Φυσικής από την Αναγέννηση και μετά. Τον 19ο αιώνα όμως η μοναδικότητα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας "υπονομεύτηκε". Ποιοι μαθηματικοί και πώς μπόρεσαν να αμφισβητήσουν την κυριαρχία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας;

4.

Μερικοί έχουν την εντύπωση ότι μέσα στο μαθηματικό οικοδόμημα η Αριθμητική, η Άλγεβρα και η Γεωμετρία αποτελούν εντελώς διακεκριμένους κλάδους. Αυτό είναι σοβαρό λάθος. Όλες συνεργάζονται, η μία βοηθά την άλλη, και σε μερικές περιπτώσεις μάλιστα εναλλάσσονται. (σελ.75)

iv. Σε ποιο ακριβώς πρόβλημα αναφέρεται ο Μπέρεμιζ;

v. Ονόμασε άλλους κλάδους των Μαθηματικών. Προσπάθησε να εξηγήσεις με τι ασχολείται ο καθένας.

vi. Γιατί δεν αναφέρεται σ' αυτούς τους κλάδους ο ήρωάς μας;

Φύλλο Εργασίας 4α

Ονοματεπώνυμο:
Ημερομηνία:

Αφού διαβάσεις προσεκτικά τα κεφάλαια 15- 19 απάντησε στις ερωτήσεις που ακολουθούν σύντομα και περιεκτικά.. Στο τέλος καθε απάντησης γράψε και την πηγή πληροφόρησης σου: δικτυακος τόπος, βιβλίο, άρθρο, περιοδικό κτλ

1. Γράψε μια σύντομη περίληψη (περίπου 90- 100 λέξεις) των κεφαλαίων που διάβασες.

2α. Στη σελίδα 57 τα Μαθηματικά αποκαλούνται ως «*η επιστήμη του Αλ Κβαρίσμι*», ενώ στο κεφάλαιο 15 ο Άραβας μαθηματικός αναφέρεται άλλες δύο φορές. Είναι αυτός στον οποίο -μεταξύ άλλων- αφιερώνει το βιβλίο ο συγγραφέας αποκαλώντας τον «*μεγάλο μουσουλμάνο φιλόσοφο, μαθηματικό και αστρονόμο*». Ποιος ήταν ο Αλ Κβαρίσμι και ποια η συνεισφορά του στα Μαθηματικά; (Περίπου 200 λέξεις)

Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi

Άγαλμα του Al Khwarizmi έξω από το τμήμα τεχνολογίας του Πανεπιστημίου της Τεχεράνης Ο Al Khwarizmi κρατώντας έναν αστρολάβο στα χέρια του κοιτάζει προς τον ουρανό.

2β. Στην παραπάνω εικόνα εμφανίζεται ο Αλ Κβαρίσμι να κρατάει έναν αστρολάβο. Τι είναι ο αστρολάβος; Ποιοι και γιατί τον χρησιμοποιούσαν; Ποιοι, νομίζεις, είναι οι λόγοι που δε χρησιμοποιείται σήμερα;

3. Απαστάμπα, Αριαμπάτα, Μπραχμαγκούπτα, Μπασκάρα είναι ορισμένοι από τους Ινδούς μαθηματικούς που αναφέρονται στο κεφάλαιο 18.

ii. Γράψε λίγα λόγια για το έργο και τη συνεισφορά των Ινδών μαθηματικών στα Μαθηματικά. (περίπου 200 λέξεις). Τι καινούριο εισήγαν στην έως τότε υπάρχουσα μαθηματική γνώση;

Αριαμπάτα

Άγαλμα του Aryabhata στο χώρο του τμήματος αστρονομίας και αστροφυσικής στο Pune, Ινδία

iii. Γιατί η γραφή των αριθμών που χρησιμοποιούμε σήμερα ονομάζεται αραβική ή ινδοαραβική και όχι ινδική;

3. Στο κεφάλαιο 19 γίνεται λόγος για αριθμούς που έχουν «μαγικές» ιδιότητες. Από τους πιο γνωστούς αριθμούς με τέτοιες ιδιότητες είναι οι αριθμοί της ακολουθίας Fibonacci, η οποία πήρε το όνομά της από τον μαθηματικό του Μεσαίωνα, ο οποίος πρώτος την περιέγραψε στο βιβλίο του Liber Abaci που εξέδωσε το 1202.

i. Ποιος ήταν ο Fibonacci και ποια η συνεισφορά του στα Μαθηματικά; (περίπου 200 λέξεις)

Fibonacci

Δομινικανικό γραμματόσημο έκδοσης 1999. Διακρίνονται το μηδέν και το φ.

ii. Ποιο πρόβλημα οδήγησε τον Fibonacci στην ανακάλυψη της ομώνυμης ακολουθίας και πώς αυτή συνδέεται με τον αριθμό φ της χρυσής τομής; Σε ποια ιστορικά έργα τέχνης και αρχιτεκτονικής συναντούμε τον κανόνα της χρυσής τομής;

iii. «*Οι αριθμοί Fibonacci αποτελούν το αριθμητικό σύστημα της φύσης.*» Τι μπορεί να σημαίνει η παραπάνω πρόταση; Ποια είναι η δική σου άποψή; Με ποια επιχειρήματα μπορείς να την τεκμηριώσεις;

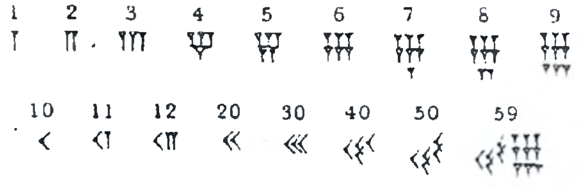
Φύλλο Εργασίας 5α

Ονοματεπώνυμο:
Ημερομηνία:

Αφού διαβάσεις προσεκτικα τα κεφάλαια 20-26 απάντησε στις ερωτησεις που ακολουθούν σύντομα και περιεκτικά. Στο τέλος κάθε απαντησης γράψε και την πηγη πληροφόρησης σου: δικτυακός τόπος, βιβλίο, άρθρο, περιοδικό κτλ

1. Γράψε μια σύντομη περίληψη (περίπου 90- 100 λέξεις) των κεφαλαίων που διάβασες.

2α. Στο κεφάλαιο 20 επιχειρείται μια ιστορική αναδρομή στα συστήματα αρίθμησης. Γράψε λίγα λόγια για την ιστορική εξέλιξη των συστημάτων αρίθμησης.(περίπου 200 λέξεις)



Εξηνταδικό σύστημα αρίθμησης

2β Στο ίδιο κεφάλαιο υποστηρίζεται η υπεροχή του ινδοαραβικού συστήματος (δηλαδή του θεσιακού με βάση το 10), έναντι των άλλων συστημάτων αρίθμησης. Ποιοι λόγοι νομίζεις, οδήγησαν στην επικράτηση του ινδοαραβικού συστήματος αρίθμησης έναντι των άλλων συστημάτων; Γιατί το ινδοαραβικό σύστημα χαρακτηρίζεται ψηφιακό και θεσιακό;

3. Προβλήματα μερισμού ενός μεγέθους σε απειροστά μέρη όπως αυτό που παρουσιάζεται στο κεφάλαιο 22, εμφανίζονται από την αρχαιότητα.. Πολύ γνωστό είναι το παράδοξο του Ζήνωνα του Ελεάτη με τον Αχιλλέα και τη χελώνα..

iii. Γράψε λίγα λόγια για τη ζωή του Ζήνωνα. Ποια ήταν τα βασικά σημεία της Ελεατικής φιλοσοφίας. (περίπου 200 λέξεις)

iv. Περιέγραψε το παράδοξο του Ζήνωνα. Ποια άλλα παράδοξα διατύπωσε; Ανάφερε πολύ σύντομα ποια είναι αυτά. Πού βρίσκεται το παράδοξο;

Αναπαράσταση του παράδοξου του Ζήνωνα

3. Στο κεφάλαιο 24 συναντούμε για δεύτερη φορά τον Διόφαντο, τον οποίο ο Μπέρεμιζ αποκαλεί «περίφημο Έλληνα μαθηματικό».

iii. Γράψε λίγα λόγια για τη ζωή και το έργο του Διόφαντου του Αλεξανδρινού. (περίπου 200 λέξεις)

Διόφαντος ο Αλεξανδρινός


DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX.

LVTETIAE PARISIORVM

M. DC. XXI

Διόφαντου "Αριθμητικά".
Εξώφυλλο λατινικής έκδοσης του 1621

iv. Ποιες εξισώσεις ονομάζονται διοφαντικές;

4. Στο ίδιο κεφάλαιο γίνεται εκτενής αναφορά στον Αρχιμήδη ο οποίος εκτός από μαθηματικός υπήρξε και μεγάλος μηχανικός και φυσικός.

i. Γράψε λίγα λόγια για τη ζωή και το έργο του Αρχιμήδη. Ανάφερε και περιέγραψε μερικές από τις σπουδαιότερες εφευρέσεις του. (περίπου 300 λέξεις)

Αρχιμήδης

Ο θάνατος του Αρχιμήδη.
Ρωμαϊκό ψηφιδωτό. Ινστιτούτο Στέντελ, Φρανκφούρτη

ii. Ποια είναι η περίφημη "αρχή του Αρχιμήδη";

Φύλλο Εργασίας 6α

Ονοματεπώνυμο:
Ημερομηνία:

Αφού διαβάσεις προσεκτικά τα κεφάλαια 27-34 απάντησε στις ερωτήσεις που ακολουθούν σύντομα και περιεκτικά. Στο τέλος κάθε απάντησης γράψε και την πηγή πληροφόρησής σου: δικτυακός τόπος, βιβλίο, άρθρο, περιοδικό κτλ

1. Γράψε μια σύντομη περίληψη (περίπου 90- 100 λέξεις) των κεφαλαίων που διάβασες.

2α. «*Ποιος περίφημος γεωμέτρης αυτοκτόνησε επειδή δεν μπορούσε να κοιτάξει τον ουρανό;*» Με αφορμή την ερώτηση που διατυπώνεται στη σελίδα 189, ο Μπέρεμιζ αναφέρεται στον Ερατοσθένη. Γράψε για τη ζωή και το έργο του μεγάλου αυτού γεωμέτρη. (περίπου 300 λέξεις)

Ερατοσθένης ο Κυρηναίος

Λιθογραφία του P.D.Lippert,1760

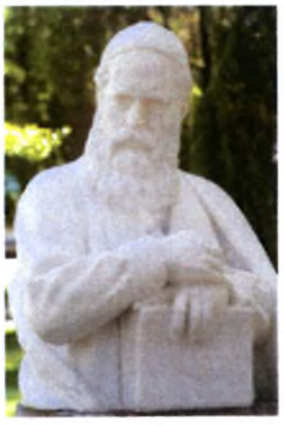
2β. Να αναφέρεις και να περιγράψεις δύο από τα σημαντικότερα επιτεύγματα του Ερατοσθένη.

3α. Στο κεφάλαιο 28 μέσα από το παράδειγμα της λανθασμένης επαγωγής τίθεται το θέμα της αυστηρότητας και της απόδειξης στον χώρο των μαθηματικών. Χωρίς απόδειξη ένα μαθηματικό πρόβλημα παραμένει στο επίπεδο της εικασίας. Υπάρχουν αρκετά παραδείγματα εικασιών στον χώρο των μαθηματικών. Μερικές από αυτές τις εικασίες είναι διάσημες και έχουν «επικηρυχθεί» με μεγάλα χρηματικά ποσά. Ανάφερε δύο τέτοιες εικασίες και περιέγραψε το πρόβλημα στο οποίο αναφέρονται. Τι άλλες πληροφορίες υπάρχουν γι' αυτές τις εικασίες σχετικά με το ποιος, πού, πότε, γιατί τις διατύπωσε; (περίπου 200 λέξεις)

3β. Περίφημη υπήρξε η εικασία που ονομάζεται «Τελευταίο Θεώρημα του Φερμά». Ποιος ήταν ο Φερμά και ποιο το ομώνυμο θεώρημα;. Γιατί έμεινε ιστορικά γνωστό ως θεώρημα και όχι εικασία; Αποδείχτηκε τελικά; (περίπου 200 λέξεις).

4. Η αφήγηση των περιπετειών του Μπέρεμιζ τελειώνει με στίχους του ποιητή και μαθηματικού Ομάρ Καγιάμ. Γράψε λίγα λόγια για τη ζωή και το έργο του. (περίπου 200 λέξεις)

Omar Khayyam



Μνημείο προς τιμήν του Ομάρ Καγιάμ στη γενέτειρα του, Neyeshabur, Ιράν

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 2: Φύλλα μαθηματικού περιεχομένου

Φύλλο Εργασίας 1β

Ονοματεπώνυμο:
Ημερομηνία:

Οι παρακάτω ερωτήσεις συνδέονται με μαθηματικά προβλήματα που αντιμετώπισε ο ήρωας του βιβλίου στα πέντε πρώτα κεφάλαια. Απάντησε την κάθε ερώτηση με τρόπο ολοκληρωμένο και κατανοητό μέσα στα επόμενα 45 λεπτά.

1α. Ο Μπέρεμιζ έλυσε στο τρίτο κεφάλαιο ένα φαινομενικά δύσκολο πρόβλημα χωρίς να διακινδυνεύσει να χάσει την καμήλα του. Γνώριζε, μάλιστα, ότι θα βγει κερδισμένος. Πως σκέφτηκε άραγε; Μπορείς με μαθηματικό τρόπο (χρήση κλασμάτων) να δείξεις τον τρόπο σκέψης του;

1β. Αν οι καμήλες που έπρεπε να μοιραστούν με την ίδια αναλογία ήταν 17 τι θα συνέβαινε; Αιτιολόγησε την απάντησή σου.

1γ. Μπορείς να προβλέψεις τι θα γινόταν σε περίπτωση που οι καμήλες ήταν 53;

1δ. Βρίσκεσαι στην τάξη και διδάσκοντας κλάσματα θυμάσαι το πρόβλημα με τις καμήλες. Έχεις ξεχάσει όμως τα δεδομένα του προβλήματος. Μπορείς να δημιουργήσεις ένα παρόμοιο πρόβλημα με άλλα αριθμητικά δεδομένα;

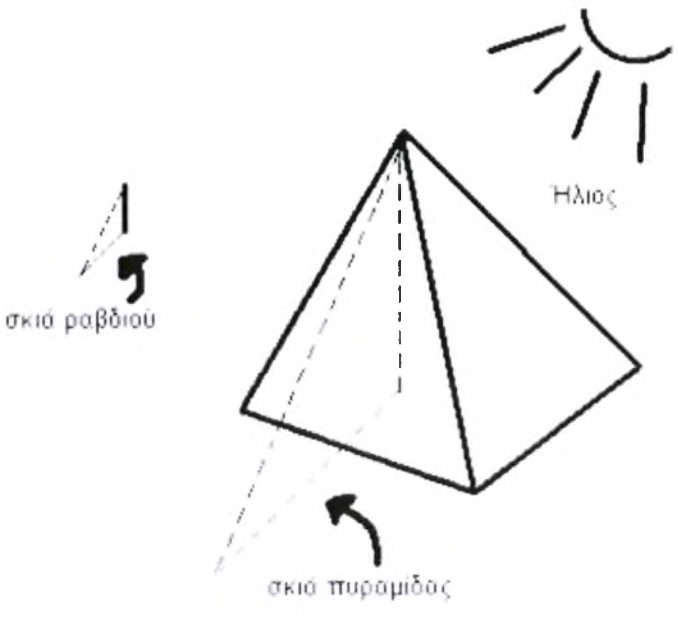
2α. Στο τέταρτο κεφάλαιο (σελ.25) ο Μπέρεμιζ δίνει μία μαθηματική και μία δίκαιη λύση στο πρόβλημα της μοιρασιάς των χρυσών νομισμάτων. Αν ο Μπέρεμιζ είχε 6 καρβέλια και ο φίλος του 4 ο έμπορος θα τους πλήρωνε 10 χρυσά νομίσματα. Πώς θα μοιράζονταν τότε τα χρυσά νομίσματα οι δύο φίλοι σύμφωνα με τη μαθηματική λύση;

2β. Υπάρχουν περιπτώσεις όπου σύμφωνα με τη μαθηματική λύση ο Μπέρεμιζ θα έπρεπε να πάρει όλα τα χρυσά νομίσματα. Πόσα καρβέλια θα έπρεπε να έχει ο Μπέρεμιζ και πόσα ο φίλος του σε μία τέτοια περίπτωση;

3α. Το πρόβλημα που παρουσιάζεται στο κεφάλαιο 5 λύνεται με αναλογίες. Ποια ιδιότητα των κλασμάτων χρησιμοποιείται στη δημιουργία αναλογιών;

3β. Μια παρόμοια μέθοδο χρησιμοποίησε ο Θαλής ο Μιλήσιος ώστε να μετρήσει το ύψος της πυραμίδας του Χέοπα, χρησιμοποιώντας μετρήσεις των σκιών της πυραμίδας και του εαυτού του. Μπορείς να σκεφτείς την αναλογία που χρησιμοποίησε;

3γ. Για τη μέτρηση του ύψους των πυραμίδων ο Θαλής εργάστηκε ως εξής: χρησιμοποίησε ένα ραβδί γνωστού μήκους, το οποίο στήριξε κάθετα στο έδαφος δίπλα από τις πυραμίδες. Στη συνέχεια μέτρησε το μήκος της σκιάς του ραβδιού και της πυραμίδας και υπολόγισε το ύψος της πυραμίδας. Με βάση τα παραπάνω δεδομένα, ποια ήταν η αναλογία που χρησιμοποίησε;



Πηγή: users.ntua.gr/el01741/MyWebPage/Info/pyramids.htm

Φύλλο Εργασίας 2β

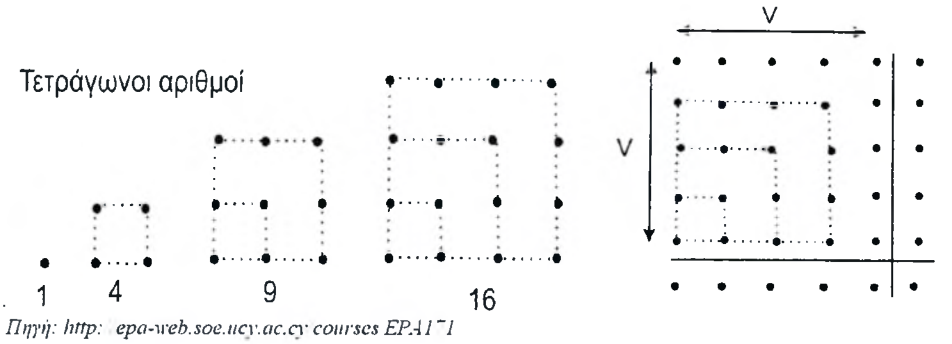
Ονοματεπώνυμο:
Ημερομηνία:

Οι παρακάτω ερωτήσεις συνδέονται με μαθηματικά προβλήματα που αντιμετώπισε ο ήρωας του βιβλίου από το έκτο μέχρι το ένατο κεφάλαιο. Απάντησε την κάθε ερώτηση με τρόπο ολοκληρωμένο και κατανοητό μέσα στα επόμενα 45 λεπτά.

1α. Στη σελίδα 39 του κεφαλαίου 6 αναφέρεται ότι ο 256 αποτελεί δύναμη του 2 ενώ ταυτόχρονα είναι και τετράγωνος αριθμός. Γιατί είναι τετράγωνος αριθμός; Ποια δύναμη του 2 είναι ο 16;

1β. Ο αριθμός 529 που αναφέρει ο Μπέρεμιζ είναι δύναμη του 2; Γιατί;

2α. Οι Πυθαγόρειοι χρησιμοποιούσαν τον παρακάτω τρόπο για να δημιουργήσουν τετράγωνους αριθμούς:



Πηγή: http: epa-web.soe.ucy.ac.cy courses EPA1 ̄1

v. Γιατί νομίζεις ότι αυτοί οι αριθμοί ονομάζονται τετράγωνοι ή τετραγωνικοί;

vi. Από τα τέσσερα πρώτα παραδείγματα φαίνεται εύλογο να υποθέσουμε ότι:

$$1+3+5+7+9+\ldots\ldots\ldots+(2\nu-1) = \nu^2 \quad (\nu = \text{θετικός ακέραιος αριθμός})$$

Πηγή: Αναπολιτάνος,Δ.(1985). *Εισαγωγή στη φιλοσοφία των Μαθηματικών*. Αθήνα: Νεφέλη

Δείξε ότι η σχέση αυτή ισχύει για τον τετράγωνο αριθμό $\nu^2 = 100$. Μπορείς να με πείσεις ότι ισχύει για όλους τους αριθμούς;

vii. Πόσοι τετράγωνοι αριθμοί υπάρχουν από το 2 έως το 101;

viii. Τι αποτέλεσμα προκύπτει όταν το πλήθος των προσθετέων είναι άρτιος και τι όταν είναι περιττός αριθμός;

2β. Με τον ίδιο τρόπο οι Πυθαγόρειοι δημιουργούσαν τριγωνικούς αριθμούς όπως στο παρακάτω σχήμα..

Πηγή: http: users.sch.gr kassetas ed0math22.htm

v. Συμπλήρωσε στην παραπάνω ακολουθία τους επόμενους δύο τριγωνικούς αριθμούς και γράψε από κάτω τους ποιον αριθμό αντιπροσωπεύουν.

vi. Ποιος, νομίζεις, είναι ο κανόνας συγκρότησης της ακολουθίας των τριγωνικών αριθμών; Πείσε με ότι έχεις δίκαιο.

vii. Με τι ισούται το άθροισμα $1+2+3+...+10$; Το άθροισμα $1+2+3+...+100$; Το άθροισμα $1+2+3+...+\nu$;

viii. Εξέτασε αν αληθεύει η παρακάτω πρόταση: «Κάθε τετραγωνικός αριθμός είναι άθροισμα δύο διαδοχικών τριγωνικών αριθμών».

3α. Στο κεφάλαιο 7 ο Μπέρεμιζ σχηματίζει τους δέκα πρώτους αριθμούς χρησιμοποιώντας 4 τεσσάρια.. Με τον ίδιο τρόπο σχηματίζουμε και αριθμούς πάνω από το 10. Έκτός όμως από αυτόν τον συνδυασμό οι δέκα πρώτοι αριθμοί μπορούν να σχηματιστούν από 5 δυάρια ή από 4 τριάρια. Με έναν απ' αυτούς τους συνδυασμούς σχημάτισε τους αριθμούς από το 0 μέχρι το 10.

0:

1:

2:

3:

4:

5:

6:

7:

8:

9:

10:

3β. Μπορείς να σκεφτείς με ποιο τρόπο μπορούμε να σχηματίσουμε τον αριθμό 1000 χρησιμοποιώντας 8 οχτάρια;

4α. Διάβασε στη σελίδα 53 το πρόβλημα των βαρελιών που προτείνει ο Μπέρεμιζ και τη λύση του. Είναι η μοναδική λύση; Ναι ή όχι; Αν όχι μπορείς να σκεφτείς και να γράψεις τον άλλο τρόπο μερισμού των βαρελιών; Είναι η λύση σου απλούστερη;

4β. Αν τα βαρέλια ήταν 18 εκ των οποίων τα 6 γεμάτα, τα 6 μισογεμάτα και τα 6 άδεια πως θα μπορούσαν να μοιραστούν, έτσι ώστε ο κάθε φίλος να πάρει και την ίδια ποσότητα κρασιού αλλά και τον ίδιο αριθμό βαρελιών;

2γ. Ο μεγάλος Γερμανός Μαθηματικός του $19^{ου}$ αιώνα, Karl Friedrich Gauss(1775-1855), σε ηλικία 10 ετών υπολόγισε το άθροισμα των εκατό πρώτων φυσικών ακεραίων, με τρόπο που εξέπληξε τους δασκάλους του. Για τον υπολογισμό του αθροίσματος χώρισε τους αριθμούς στη μέση και δημιούργησε ζευγάρια αριθμών όπως παρακάτω:

$$\begin{array}{l}
\ \ \ 1 + \ \ 2 + \ \ \ 3 + \ \ 4 + \ \ 5 \ldots + \ 48 + 49 \ + \ 50 \\
\underline{\ 100 + \ 99 \ + 98 + 97 + 96 \ldots + \ 53 + 52 \ + \ 51} \\
101 + 101 + 101 + 101 + 101 \ldots + 101 + 101 + 101
\end{array}$$

Με τη βοήθεια της τεχνικής αυτής υπολόγισε το άθροισμα των εκατό πρώτων φυσικών ακέραιων αριθμών.

Φύλλο Εργασίας 3β

Ονοματεπώνυμο:
Ημερομηνία:

Οι παρακάτω ερωτήσεις συνδέονται με μαθηματικά προβλήματα που αντιμετώπισε ο ήρωας του βιβλίου από το δέκατο μέχρι το δέκατο τέταρτο κεφάλαιο. Απάντησε την κάθε ερώτηση με τρόπο ολοκληρωμένο και κατανοητό μέσα στα επόμενα 45 λεπτά.

1.

> *«Από τους αριθμούς, που συνιστούν τη βάση όλης της σκέψης και της κατανόησης, προκύπτει μια άλλη έννοια αναμφισβήτητης σημασίας: η έννοια της "μέτρησης"... Μετρώ σημαίνει συγκρίνω. Ωστόσο μόνο όσα πράγματα έχουν κάποιο συγκρίσιμο στοιχείο μπορούν υποβληθούν σε μέτρηση...».* (σελ. 74)

Για την εξυπηρέτηση των αναγκών μέτρησης του ανθρώπου έχουν καθιερωθεί διεθνώς τα μετρικά συστήματα και οι μονάδες μέτρησης τους.

iv. Ποιοι λόγοι πιστεύεις ότι κατέστησαν αναγκαία την ύπαρξη τέτοιων συστημάτων;

v. Ανέφερε τα μετρικά συστήματα που γνωρίζεις;

vi. Ποιες είναι οι μονάδες μέτρησης των συστημάτων που ανέφερες;

2. Στο πρόβλημα των πεπονιών που δίνει λύση ο Μπέρεμιζ στο κεφάλαιο 12 το "λάθος" ξεκινάει από τον αρχικό συλλογισμό του εμπόρου ότι η μέση τιμή των πέντε πεπονιών είναι 2 δηνάρια.. Αυτή η μέση τιμή όμως θα ίσχυε μόνο, αν στο τελικό σύνολο συμμετείχε ίσος αριθμός πεπονιών από κάθε ομάδα. Αποφασίζει λοιπόν να τα πουλήσει σε εξάδες δηλαδή τρία από τη μία ομάδα και τρία από την άλλη.

iv. Υπολόγισε με μαθηματικό τρόπο πόσο θα έπρεπε να πουλάει τώρα την εξάδα.

v. Έλεγξε αν με την καινούρια τιμή θα εισέπραττε το σωστό ποσό από την πώληση όλων των πεπονιών.

vi. Λαμβάνοντας ίσο αριθμό πεπονιών από κάθε ομάδα, πώς αλλιώς θα μπορούσε να ομαδοποιήσει τα πεπόνια ο έμπορος, ώστε να μην περισσεύει στο τέλος κανένα πεπόνι από τα εξήντα που έχει; Πρότεινε τουλάχιστον άλλους δύο διαφορετικούς τρόπους.

3α . Στη σελίδα 66 του δέκατου κεφαλαίου ο Μπέρεμιζ αναφέρεται στους τέλειους αριθμούς δίνοντας παραδείγματα τέτοιων αριθμών, αλλά και τον ορισμό τους . Πως χαρακτηρίζεις τη συνθήκη που πρέπει να ικανοποιούν δύο αριθμοί ώστε να ονομάζονται «τέλειου»; Τι σημαίνει αυτό;

3β. Οι τέλειοι αριθμοί ήταν γνωστοί στους πυθαγόρειους. Αποδίδεται στον Πυθαγόρα η συσχέτιση της τελειότητας με τις δυνάμεις του 2. Αιώνες αργότερα ο Ευκλείδης το διατύπωσε πιο σωστά. Μέσα από ένα θεώρημα του ένατου βιβλίου των στοιχείων του προκύπτει ότι αν ο $2^{\nu}-1$ είναι πρώτος αριθμός τότε ο $2^{\nu-1}(2^{\nu}-1)$ είναι τέλειος αριθμός. Ακολουθώντας το θεώρημα του Ευκλείδη βρες τους τέσσερις πρώτους τέλειους αριθμούς.

4.

> *«Είναι αδύνατο να υπολογίσουμε ακριβώς την περιφέρεια ενός κύκλου ακόμα κι αν γνωρίζουμε τη διάμετρο. Μπορούμε να βρούμε μια κοντινή τιμή, αλλά η ακριβής τιμή παραμένει άγνωστη στους γεωμέτρες... Ο ακριβής αυτός αριθμός φαίνεται να περιβάλλεται από κάποιο μυστήριο, καθώς περιέχει ιδιότητες που μόνο ο Αλλάχ μπορεί να αποκαλύψει»* (σελ. 104-105)

vi. Ποιο είναι το μυστήριο του αριθμού στον οποίο αναφέρεται ο Μπέρεμιζ στο παραπάνω κείμενο; Γιατί «*περιέχει ιδιότητες που μόνο ο Αλλάχ μπορεί να αποκαλύψει*»;

vii. Ποιος αριθμός περιγράφει τη σχέση περιφέρειας κύκλου- διαμέτρου και πως συμβολίζεται; Τι γνωρίζεις γι' αυτόν τον αριθμό.

viii. Ποιος τύπος δίνει τη σχέση περιφέρειας κύκλου - διαμέτρου;

ix. Προκειμένου να κατασκευάσεις έναν κύκλο διαμέτρου 2 μέτρων με σκοινί, πόσο σκοινί ***ακριβώς*** θα πρέπει να έχεις στη διάθεσή σου; Αιτιολόγησε την απάντησή σου.

x. Ένα από τα διάσημα προβλήματα των αρχαίων ελληνικών μαθηματικών ήταν αυτό του τετραγωνισμού του κύκλου. Τι γνωρίζεις γι' αυτό το πρόβλημα; Γιατί δεν είναι δυνατή η λύση του με χρήση γνώμονα και διαβήτη;

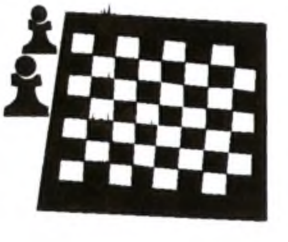
Φύλλο Εργασίας 4β

Ονοματεπώνυμο:
Ημερομηνία:

Οι παρακάτω ερωτήσεις συνδέονται με μαθηματικά προβλήματα που αντιμετώπισε ο ήρωας του βιβλίου από το δέκατο πέμπτο μέχρι το δέκατο ένατο κεφάλαιο. Απάντησε την κάθε ερώτηση με τρόπο ολοκληρωμένο και κατανοητό μέσα στα επόμενα 45 λεπτά.

1α. Μεταξύ των πολλών φανταστικών ιστοριών που αναφέρονται στην προέλευση του σκακιού σημαντική θέση κατέχει αυτή που περιγράφει ο Μπέρεμιζ στο κεφάλαιο 16. Σύμφωνα με την εκδοχή αυτή ο νεαρός βραχμάνος που ανακάλυψε το σκάκι ζήτησε ως αμοιβή: *ένα σπόρο σταριού για το πρώτο τετράγωνο της ξύλινης πλάκας, δύο για το δεύτερο, τέσσερις για το τρίτο, οκτώ για το τέταρτο, διπλασιάζοντας το ποσό του σιταριού για κάθε επόμενο τετράγωνο έως και το εξηκοστό τέταρτο.*

i. Ποια ακολουθία αριθμών προκύπτει από την απαίτηση του νεαρού βραχμάνου; Ποιος είναι ο κανόνας συγκρότησης αυτής της ακολουθίας;

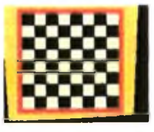


ii. Πώς ονομάζεται αυτή η ακολουθία; Ποια είναι η μορφή της γραφικής της παράστασης;

iii. Λαμβάνοντας υπόψη ότι το άθροισμα των όρων μιας τέτοιας ακολουθίας είναι $\Sigma = 2^{\nu}-1$, όπου ν το πλήθος των όρων της ακολουθίας, ποια είναι η γνώμη σου σχετικά με την απάντηση που έδωσαν οι μαθηματικοί στον βασιλιά τους;

1β. Αν ο άνθρωπος που ανακάλυψε το σκάκι ζητούσε «*ένα σπόρο σιταριού για το πρώτο τετράγωνο, δύο για το δεύτερο, τρία για το τρίτο, τέσσερα για το τέταρτο συνεχίζοντας έτσι μέχρι το εξηκοστό τέταρτο*» θα προέκυπτε μια άλλη ακολουθία αριθμών.

i. Πως θα έγραφες τότε αυτή την καινούρια ακολουθία; Ποιος είναι ο κανόνας συγκρότησης αυτής της ακολουθίας;



ii. Πώς ονομάζεται αυτή η ακολουθία; Ποια είναι η μορφή της γραφικής της παράστασης;

iii. Το άθροισμα των όρων μιας τέτοιας ακολουθίας προκύπτει από τον τύπο $\Sigma = {}^{\nu}/_{2}(\alpha_1+\alpha_\nu)$, όπου ν το πλήθος των όρων της ακολουθίας και α_1, α_ν ο πρώτος και τελευταίος όρος της ακολουθίας αντίστοιχα. Ποιο θα ήταν το άθροισμα των σπόρων σταριού που έπρεπε δοθεί σ' αυτή την περίπτωση; Θα μπορούσε τότε να ξεπληρώσει ο βασιλιάς;

2. Στις σελίδες 121-123 του κεφαλαίου 17 περιγράφεται το πρόβλημα της πώλησης των μήλων και παρουσιάζεται η λύση που πρότεινε ο Μπέρεμιζ. Ένα παρόμοιο πρόβλημα είναι και το παρακάτω:
«*Τρεις κοπέλες μοιράζονται 135 μήλα. Η πρώτη παίρνει 65, η δεύτερη 50 και η τρίτη 20. Πρέπει να τα πουλήσουν έτσι ώστε για κάθε οκτώ μήλα να πληρώνονται ένα δηνάριο, ενώ τα υπόλοιπα πρέπει να τα πουλήσουν στην ίδια τιμή που θα πουλήσει η πρώτη.*»
Περιέγραψε τον τρόπο με τον οποίο πρέπει να πουληθούν τα μήλα, ώστε η κάθε κοπέλα να εισπράξει το ίδιο ποσό δηναρίων;

3α. Στη σελίδα 131 αναφέρεται ότι οι Ινδοί ιερείς χρησιμοποιούσαν το Πυθαγόρειο Θεώρημα και την έως τότε υπάρχουσα γεωμετρική γνώση για την κατασκευή ή τη μετατροπή ορθογωνίων βωμών σε τετράγωνους ίσου εμβαδού; Σήμερα αυτό γίνεται με πιο εύκολο τρόπο. Υπολόγισε αλγεβρικά την πλευρά τετραγώνου ισεμβαδικού με ορθογώνιο παραλληλόγραμμο πλευρών μήκους 4 και 9 μέτρα;

3β. Κατασκεύασε τρίγωνο ισεμβαδικό με το παραπάνω παραλληλόγραμμο. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορείς να το κατασκευάσεις;

3γ. Μπορείς να κατασκευάσεις κύκλο ισεμβαδικό με το παραπάνω παραλληλόγραμμο; Αν όχι, γιατί νομίζεις ότι δε γίνεται αυτό; Ποιο ιστορικό πρόβλημα σου θυμίζει;

4 Το πρόβλημα του προβλήματος με τις μέλισσες στη σελίδα 135 αφορά στην ουσία εξίσωση 1ου βαθμού που περιέχει έναν άγνωστο (x). Γράψε την εξίσωση που προκύπτει από τα δεδομένα του προβλήματος. Ποιο αποτέλεσμα προκύπτει από τη λύση της; Συμφωνείς με την απάντηση που έδωσε ο Μπέρεμιζ;

Φύλλο Εργασίας 5β

Ονοματεπώνυμο:
Ημερομηνία:

Οι παρακάτω ερωτήσεις συνδέονται με μαθηματικά προβλήματα που αντιμετώπισε ο ήρωας του βιβλίου από το εικοστό μέχρι το εικοστό έκτο κεφάλαιο. Απάντησε στην κάθε ερώτηση με τρόπο ολοκληρωμένο και κατανοητό μέσα στα επόμενα 45 λεπτά.

1α. Στο κεφάλαιο 20 γίνεται εκτενής αναφορά στα συστήματα αρίθμησης και υποστηρίζεται η υπεροχή του ινδοαραβικού έναντι των άλλων συστημάτων αρίθμησης.

i. Γράψε ως άθροισμα δυνάμεων του 10 τον αριθμό 2456. Γιατί το ινδοαραβικό σύστημα ονομάζεται θεσιακό.

ii. Στην περίπτωση του δυαδικού συστήματος η βάση του συστήματος είναι το 2. Γράψε ως άθροισμα δυνάμεων του 2 τον αριθμό 1101. Σε ποιον αριθμό του δεκαδικού συστήματος αντιστοιχεί αυτό ο αριθμός; Σε ποιον αριθμό αντιστοιχεί το 100 του δυαδικού; Είναι το δυαδικό σύστημα θεσιακό

iii. Σε ποιους αριθμούς του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης αντιστοιχούν οι αριθμοί 23 και 122 του πενταδικού; Είναι το πενταδικό σύστημα θεσιακό;

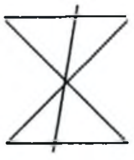
iv. Ποιο είναι το άθροισμα στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης δύο αριθμών α και β, όπου α = 101 στο δυαδικό και β = 41 στο πενταδικό;

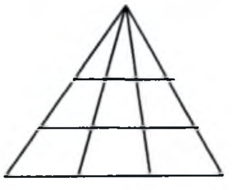
v. Παρά την επικράτηση όμως του δεκαδικού συστήματος, στην τεχνολογία ηλεκτρονικών υπολογιστών και πληροφορικών συστημάτων η χρήση του δυαδικού συστήματος θεωρείται εκ των ων ουκ άνευ. Γιατί ενώ στην τεχνολογία των Η/Υ η χρήση του δυαδικού συστήματος θεωρείται αναγκαία, στην καθημερινή ζωή στάθηκε ανέφικτη. Τι νομίζεις ότι θα συνέβαινε αν αποφασιζόταν η υιοθέτηση του δυαδικού συστήματος αρίθμησης στην καθημερινή μας ζωή;

1010010011001011001
1101001100110010101
1110100101010100000
1010110011001011101
1100101100110010110
0010110010011001010
1001001001010101011
1001000110010101011
0101100001100110011
1000110011001100110
0011000110011001100
0110011001010011001
1100010001100110001

vi. Το εξηνταδικό σύστημα των Βαβυλωνίων έχει επιβιώσει (κάποια μορφή του) μέχρι σήμερα και εμφανίζεται σε δύο τουλάχιστον μετρικά συστήματα που χρησιμοποιούμε τόσο πολύ συχνά, ώστε να μην το αντιλαμβανόμαστε. Ποια είναι αυτά τα μετρικά συστήματα;

2α. Στη σελίδα 157 του κεφαλαίου 21 διατυπώνεται ένα πρόβλημα διάταξης και παρουσιάζεται σχηματικά η λύση του. Παρόμοια προβλήματα διάταξης υπάρχουν πολλά. Διατύπωσε για καθένα από τα παρακάτω σχήματα ένα πρόβλημα διάταξης.





2β. Διατύπωσε ένα δικό σου πρόβλημα διάταξης, παρουσιάζοντας σχηματικά τη λύση του.

3α. Ένα παρόμοιο πρόβλημα με αυτό του φυλακισμένου στο κεφάλαιο 22 μπορεί να διατυπωθεί ως εξής: *«Ένας επιχειρηματίας σκέφτηκε το παρακάτω συνταξιοδοτικό πρόγραμμα για τους υπαλλήλους του: Τους είπε πως θα τους δώσει σύνταξη αμέσως μόλις ο καθένας τους εργασθεί για 8 καθαρές ώρες στο ταμείο της εταιρίας. Η μόνη προϋπόθεση που έθεσε ήταν ότι καθένας τους πρέπει να εργασθεί κάθε μέρα το μισό του χρόνου που του απομένει για να συμπληρώσει τις 8 αυτές ώρες. Σε πόσες ημέρες αυτός ο υπάλληλος θα μπορέσει να βγει στη σύνταξη;»*.

iii. Γράψε την ακολουθία που προκύπτει από το παραπάνω πρόβλημα. Ποιος είναι ο πρώτος όρος και ποιος ο λόγος της ακολουθίας; Πώς ονομάζεται αυτή η ακολουθία;

iv. Τι θα συμβεί με τη συνταξιοδότηση των υπαλλήλων; Σύγκρινε το πρόβλημα αυτό με το παράδοξο του Ζήνωνα

3β. Ο πρώτος όρος μιας ακολουθίας αριθμών είναι ο 0,9 και ο λόγος της 1/10.

i. Γράψε την ακολουθία που προκύπτει. Ποιος αριθμός προκύπτει από το άθροισμα των όρων αυτής της ακολουθίας; Πώς ονομάζεται αυτός ο αριθμός;

ii. Το άθροισμα απείρων όρων μιας γεωμετρικής προόδου με λόγο μικρότερο της μονάδας είναι $\Sigma = \frac{a_1}{1-\lambda}$, όπου α_1 ο πρώτος όρος και λ ο λόγος της προόδου. Εφαρμόζοντας τον παραπάνω τύπο υπολόγισε το άθροισμα των όρων της παραπάνω ακολουθίας; Τι παρατηρείς; Πως το εξηγείς;

4α. Το πρόβλημα εύρεσης της ηλικίας του Διόφαντου στη σελίδα 173 λύνεται με μια εξίσωση $1^{ου}$ βαθμού. Γράψε την εξίσωση που προκύπτει από τα δεδομένα και λύσε την. Συμπίπτει η ηλικία που προέκυψε από την εξίσωση με το αποτέλεσμα που δίνει ο Μπέρεμιζ;

4β. Διατύπωσε ένα δικό σου πρόβλημα, το οποίο να λύνεται με εξίσωση $1^{ου}$ βαθμού. Ποια εξίσωση προκύπτει από τα δεδομένα του προβλήματός σου; Ποιο αποτέλεσμα προκύπτει από τη λύση της;

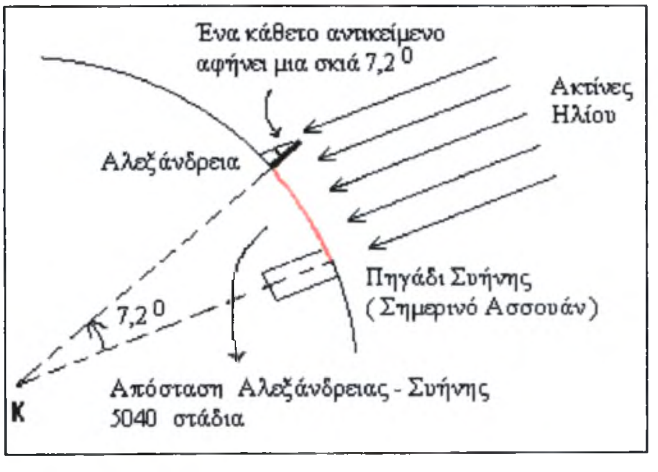
Φύλλο Εργασίας 6β

Ονοματεπώνυμο:
Ημερομηνία:

Οι παρακάτω ερωτήσεις συνδέονται με μαθηματικά προβλήματα που αντιμετώπισε ο ήρωας του βιβλίου από το εικοστό έβδομο μέχρι το τριακοστό τέταρτο κεφάλαιο. Απάντησε την κάθε ερώτηση με τρόπο ολοκληρωμένο και κατανοητό μέσα στα επόμενα 45 λεπτά.

1. Ο Ερατοσθένης, όπως αναφέρεται στο κεφάλαιο 27, κατάφερε να μετρήσει την περιφέρεια της γης με σχετικά μεγάλη ακρίβεια γνωρίζοντας ότι μια συγκεκριμένη μέρα και ώρα (θερινό ηλιοστάσιο) στη Συήνη (Ασουάν) σε απόσταση περίπου 800 χιλιομέτρων (5040 στάδια) από την Αλεξάνδρεια, οι ακτίνες του ήλιου έπεφταν κάθετα στον πάτο ενός πηγαδιού. Παρατηρώντας την ίδια ακριβώς στιγμή στην Αλεξάνδρεια το μήκος της σκιάς του ραβδιού του υπολόγισε τη γωνία που σχηματίζουν οι ακτίνες του ήλιου με την κατακόρυφη ράβδο σε $7{,}2^0$.

Με τη βοήθεια του παρακάτω σχήματος να περιγράψεις τον τρόπο με τον οποίο εργάστηκε στη συνέχεια ο Ερατοσθένης, προκειμένου να υπολογίσει την περιφέρεια της γης.



2. Ο τέταρτος σοφός θέτει στον Μπέρεμιζ μία ερώτηση που δεν έχει μαθηματική απάντηση. Το ξανασκέφτεται και αποφασίζει να θέσει μια διαφορετική ερώτηση: *«ποιοι αριθμοί γίνονται μικρότεροι όταν πολλαπλασιασθούν με τον εαυτό τους και μεγαλύτεροι όταν διαιρεθούν με τον εαυτό τους;»* Βοήθησε τον ήρωά μας να βρει την απάντηση χρησιμοποιώντας ένα παράδειγμα για τον πολλαπλασιασμό κι ένα για τη διαίρεση.

3. Το πρόβλημα με τους τρεις πρίγκιπες που λύνει στο κεφάλαιο 31 ο Μπέρεμιζ αποτελεί ένα γρίφο, ένα παιχνίδι λογικής που λύνεται με την «εις άτοπον απαγωγή». Η εξήγηση της λύσης φαίνεται να είναι αρκετά μπερδεμένη έτσι που κάποιοι από το κοινό που παρακολουθούσαν τη λύση δεν τη κατάλαβαν. Διατύπωσε τη λύση που πρότεινε ο Μπέρεμιζ με απλό και κατανοητό τρόπο.

4. Λύση παρόμοια μ' αυτή που προτείνεται στο πρόβλημα με τα μαργαριτάρια στις σελίδες 214-215 του κεφαλαίου 32, μπορεί να ισχύει και στην περίπτωση που τα μαργαριτάρια είναι 4, 5, 6, 7 ή 9.

iii. Στην περίπτωση που τα μαργαριτάρια ήταν 9 πως θα εργαζόσουν προκειμένου να βρεις τη λύση;

iv. Αν τα μαργαριτάρια ήταν 15 θα μπορούσες με δύο ζυγίσεις να βρεις το ελαφρύτερο; Αν όχι, πόσες τουλάχιστον ζυγίσεις θα έπρεπε να κάνεις;

v. Στην περίπτωση που τα μαργαριτάρια ήταν 27, πόσες ζυγίσεις θα ήταν απαραίτητες ώστε να βρεις το ελαφρύτερο μαργαριτάρι; Περιέγραψε σύντομα τη λύση που προτείνεις.

5. Το τελευταίο πρόβλημα που μπόρεσε να λύσει ο Μπέρεμιζ - πριν από εκείνο το άλυτο της γυναίκας- ήταν των πέντε κοριτσιών με τα γαλανά και τα μαύρα μάτια όπως παρουσιάζεται στο κεφάλαιο 33. Φαίνεται όμως ότι βασιλιάς τον συμπάθησε, γιατί του έθεσε ένα φαινομενικά δύσκολο πρόβλημα με τη δυνατότητα τριών ερωτήσεων, τη στιγμή που μία μόνο ερώτηση θα ήταν αρκετή. Ποια είναι αυτή η ερώτηση και πως οδηγεί στη λύση του προβλήματος αυτού;

<u>ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 3: Το τελικό ερωτηματολόγιο</u>

Ερωτηματολόγιο

Βόλος, Ιανουάριος 2008

Το παρακάτω ερωτηματολόγιο αποτελεί μέρος της αξιολόγησης της διδακτικής παρέμβασης που πραγματοποιήθηκε στο πλαίσιο του μαθήματος «Διασκεδαστικά Μαθηματικά» και βασίστηκε στη διδακτική αξιοποίηση του βιβλίου «Ο άνθρωπος που μετρούσε» (Malba Tahan, 2002).
Το ερωτηματολόγιο προορίζεται ***<u>αποκλειστικά</u>*** *για ερευνητική χρήση. Σημασία έχει να απαντήσεις στις ερωτήσεις αυθόρμητα και σύμφωνα με την προσωπική σου κρίση και εμπειρία.*

Ατομικά στοιχεία

Ονοματεπώνυμο:

Έτος σπουδών: Α' ☐ Β' ☐ Γ' ☐ Δ' ☐ Άλλο ☐

Κατεύθυνση Λυκείου: Θετική ☐ Τεχνολογική ☐ Θεωρητική ☐

1. Η διδακτική παρέμβαση, στην οποία συμμετείχες, βασίστηκε στο λογοτεχνικό μυθιστόρημα «Ο άνθρωπος που μετρούσε». Ποια είναι η γνώμη σου για το συγκεκριμένο βιβλίο;

Μου άρεσε πάρα πολύ ☐

Μου άρεσε πολύ ☐

Απλώς ενδιαφέρον ☐

Μου άρεσε λίγο ☐

Δε μου άρεσε καθόλου ☐

Αιτιολόγησε την απάντησή σου ....
....
....
....
....

2. Θα μπορούσε κατά τη γνώμη σου αυτό το βιβλίο να αξιοποιηθεί στο σχολείο:

Ναι ☐ Όχι ☐

Αν ναι, με ποιον τρόπο; ....
....
....
....
....

Αν όχι, γιατί: ....
....
....
....
....

3. Με ποιον/ποιους άλλο/ους τρόπο/ους κατά τη γνώμη σου θα μπορούσε να αξιοποιηθεί αυτό το βιβλίο;
....
....
....
....
....

4. Πώς περιέγραψες (στην αρχική συνέντευξη) τη σχέση σου με τα Μαθηματικά πριν από τη διδακτική παρέμβαση;

Άριστη □ Πολύ καλή □ Καλή □ Μέτρια □ Κακή □

5. Πώς θα περιέγραφες τη σχέση σου με τα Μαθηματικά μετά από τη διδακτική παρέμβαση;

Άριστη □ Πολύ καλή □ Καλή □ Μέτρια □ Κακή □

6. Πιστεύεις ότι μετά τη διδακτική παρέμβαση άλλαξε ο τρόπος που αντιμετωπίζεις τα Μαθηματικά;

Ναι □ Όχι □

Αν απάντησες ναι, εξήγησε πώς έγινε αυτό:
....
....
....
....
....

7. Θα χρησιμοποιούσες κάποιες από τις δραστηριότητες των Φύλλων Εργασίας στην τάξη;

Ναι □ Όχι □

Αν ναι, ποιες από αυτές και γιατί;
....
....
....
....
....

8. Πιστεύεις ότι κάποιες από τις δραστηριότητες των Φύλλων Εργασίας ήταν περιττές και επομένως θα μπορούσαν να παραλειφθούν;

Ναι □ Όχι □

Αν ναι, ποιες;
....
....
....
....
....

9. Από την εμπειρία που αποκόμισες κατά τη διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης πιστεύεις:

α) ότι η διδασκαλία και μάθηση των Μαθηματικών μπορεί να προσεγγιστεί με τη χρήση λογοτεχνικών κειμένων ή βιβλίων;

Συμφωνώ απόλυτα ☐

Συμφωνώ ☐

Δεν έχω γνώμη ☐

Διαφωνώ ☐

Διαφωνώ απόλυτα ☐

β) ότι η διδασκαλία και μάθηση των Μαθηματικών μπορεί να προσεγγιστεί με τη χρήση στοιχείων από διακριτούς επιστημονικούς κλάδους ή με την ενοποίηση διακριτών επιστημονικών κλάδων;

Συμφωνώ απόλυτα ☐

Συμφωνώ ☐

Δεν έχω γνώμη ☐

Διαφωνώ ☐

Διαφωνώ απόλυτα ☐

10. Αν στην ερώτηση 9β απάντησες ότι συμφωνείς με οποιοδήποτε τρόπο, ποια ή ποιες από τις παρακάτω διδακτικές πρακτικές πιστεύεις ότι θα διευκόλυναν την ενσωμάτωση της Ιστορίας στο μάθημα των Μαθηματικών:

i. Χρήση δευτερευουσών ιστορικών πηγών ☐

ii. Παρουσίαση βιογραφιών μεγάλων Μαθηματικών ☐

iii. Ιστορικά αποσπάσματα μαθηματικών επιτευγμάτων ☐

iv. Αξιοποίηση ιστορικών προβλημάτων ☐

v. Χρήση διαδικτύου ως πηγή πληροφόρησης ☐

vi. Σύνδεση των μαθηματικών με το εκάστοτε κοινωνικό και πολιτισμικό τους πλαίσιο ☐

vii. Άλλο.. ☐

11. Λογοτεχνικά βιβλία με μαθηματικό περιεχόμενο κυκλοφορούν τα τελευταία χρόνια πολλά και ορισμένα από αυτά ανήκουν στην κατηγορία των ευπώλητων (best sellers). Θα διάβαζες μετά τη συμμετοχή σου στην πειραματική ομάδα κάποιο/α από αυτά;

Έχω διαβάσει ήδη κάποιο/α □

Σίγουρα ναι □

Μάλλον ναι □

Μάλλον όχι □

Σίγουρα όχι □

12. Υπάρχει κάτι άλλο που θα ήθελες να αναφέρεις σχετικά με τη συμμετοχή σου στην πειραματική ομάδα;

....
....
....
....
....
....